

Ficha de Trabalho 01 — Complexos

Ensino Secundário — 12.^o Ano

1. Considere o número $z = (2k - 6) + (k^2 - 9)i$, onde $k \in \mathbb{R}$. Determine os valores de k para os quais z é:
 - a) um número real;
 - b) um número imaginário puro.
2. Determine o valor real de p para o qual o número $w = (p^2 - 4) + (p + 2)i$ é um número real não nulo.
3. Determine para que valores reais de m o número $z = (m^2 - 3m + 2) + (m - 1)i$ é um número imaginário puro.
4. Considere $z = \cos x + i(2\sin^2 x - 1)$, com $x \in [0, 2\pi[$. Determine os valores de x para os quais z é um número real.
5. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $z = (k^2 - 16) + (k + 4)i$ é um número real estritamente negativo.
6. Considere $w = (3a - 12) + (a^2 - 5a + 6)i$ com $a \in \mathbb{R}$. Encontre a de modo a que $w = 0$.
7. Determine o valor real de k de modo a que o número $z = (k + 3) + i(k^2 - 1)$ pertença ao eixo imaginário no plano cartesiano.
8. Para que valores de $\alpha \in [0, \pi]$ o número $z = \sin(2\alpha) + i(2\cos \alpha - 1)$ é imaginário puro?
9. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 + 12 = 0$.
10. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 4z + 13 = 0$.
11. Determine as soluções da equação $2z^2 + 2z + 5 = 0$, apresentando-as na forma $a + bi$.
12. Encontre todas as soluções da equação $z^3 + 9z = 0$.
13. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $(z - 3)^2 + 16 = 0$.
14. Determine os números que satisfazem a equação $z^2(z^2 - 2z + 2) = 0$.
15. Resolva a equação $4z^2 + 4z + 5 = 0$ em $\mathbb{C}$.
16. Encontre as soluções da equação $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$.
17. Resolva a equação $(z^2 + 9)(z - 1) = 0$, em $\mathbb{C}$.
18. Determine as soluções da equação $z^4 - 16 = 0$.
19. Determine os números reais x e y que verificam a igualdade:
$$(2x - 1) + 3yi = 5 - 6i$$
20. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ de modo a que:
$$(a + b) + (2a - b)i = 4 + 5i$$
21. Determine os valores reais de x e y tais que:
$$(x^2 - 4) + yi = 0$$

22. Calcule os valores reais de p e q de modo que $(p - 2q) + (p + q)i = 3 - 3i$.

23. Sabendo que $a, b \in \mathbb{R}$, determine a e b tais que:

$$ai - 2 + 4i + 3b = 7 - i$$

24. Determine os valores reais de x para os quais $\operatorname{Re}(x^2 - 3 + 2i) = \operatorname{Im}(4 + 6xi)$.

25. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Determine x e y tais que $(x + i)^2 = y + 4i$.

26. Escreva na forma $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) o número $z = (3 - 2i)(1 + 4i)$.

27. Calcule o valor da expressão $(2 + i)^2 - (1 - 3i)^2$ e apresente o resultado na forma $a + bi$.

28. Escreva o número $z = \frac{5 + 2i}{1 - 2i}$ na forma $a + bi$.

29. Simplifique a expressão $w = \frac{(2 - i)^2}{3 + i}$.

30. Determine o valor numérico de $i^{15} + i^{22} - i^{33} + i^{40}$.

31. Calcule a soma $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{20}$.

32. Simplifique o número $z = \frac{1 + 3i}{i^{17}}$.

33. Escreva na forma $a + bi$ o número $z = (1 - i)^4$.

34. Simplifique a expressão $\frac{(1 + i)^3}{(1 - i)^2}$.

35. Determine a forma algébrica de $z = \frac{2i}{1 + i} + \frac{1 - 2i}{i}$.

36. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $(2 - i)z = 5 + 10i$.

37. Encontre o número que satisfaz a equação $iz + 3 = 2z - i$.

38. Encontre $z \in \mathbb{C}$ tal que $2z + \bar{z} = 6 - 2i$, onde $\bar{z}$ designa o conjugado de z .

39. Resolva a equação $z + 2\bar{z} = 9 + 3i$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z .

40. Determine $z \in \mathbb{C}$ que verifica a igualdade $i\bar{z} + 2z = 1 + 4i$.

41. Encontre as soluções da equação $z^2 = \bar{z}$.

42. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z \cdot \bar{z} + 2z = 8 + 4i$.

43. Sabendo que $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 + 2i$, determine o conjugado de $\frac{z_1}{z_2}$.

44. Calcule o módulo do número $z = \frac{3 - 4i}{1 + \sqrt{3}i}$.

45. Determine todos os números z tais que $|z| = 5$ e $\operatorname{Re}(z) = 3$.

46. Encontre $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 2$ e z seja um número imaginário puro com parte imaginária positiva.

47. Mostre que, para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o produto $z \cdot \frac{1}{z}$ é igual ao elemento neutro da multiplicação.

48. Determine o valor real de k para o qual o número $z = \frac{k + 2i}{1 - i}$ tem módulo igual a $\sqrt{10}$.

49. Encontre os números $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z - 2| = |z + 2i|$.

50. Resolva a equação $|z| - z = 1 + 2i$, em $\mathbb{C}$.



Soluções dos Exercícios

1. a) $k = \pm 3$
b) $k = 3$
2. $p = 2$
3. $m = 2$
4. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
5. $k = -4$
6. não existe $a \in \mathbb{R}$
7. $k = -3$
8. $\alpha = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$
9. $z = \pm 2\sqrt{3}i$
10. $z = 2 \pm 3i$
11. $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$
12. $z = 0 \quad \vee \quad z = \pm 3i$
13. $z = 3 \pm 4i$
14. $z = 0 \quad \vee \quad z = 1 \pm i$
15. $z = -\frac{1}{2} \pm i$
16. $z = 2 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
17. $z = 1 \quad \vee \quad z = \pm 3i$
18. $z = \pm 2 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
19. $x = 3, y = -2$
20. $a = 3, b = 1$
21. $x = \pm 2, y = 0$
22. $p = -1, q = -2$
23. $a = -5, b = 3$
24. $x = -1 \quad \vee \quad x = 7$
25. $x = 2, y = 3 \quad \vee \quad x = -2, y = 3$
26. $z = 11 + 10i$
27. $11 + 10i$
28. $z = \frac{1}{5} + \frac{12}{5}i$
29. $w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
30. 0

31. 1
32. $z = 3 - i$
33. $z = -4$
34. -2
35. $z = 1 + i$
36. $z = -2 + 5i$
37. $z = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$
38. $z = 2 - 2i$
39. $z = 3 + i$
40. $z = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$
41. $z = 0 \quad \vee \quad z = 1 \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
42. $z = 2 + 2i$
43. $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$
44. $|z| = \frac{5}{2}$
45. $z = 3 + 4i \quad \vee \quad z = 3 - 4i$
46. $z = 2i$
47. Demonstração: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$
48. $k = \pm 4$
49. Reção/Reta $y = -x$ (ou $x + y = 0$)
50. $z = \frac{3}{2} - 2i$