

Ficha de Trabalho 02 — Complexos

Ensino Secundário — 12.^o Ano

1. Considere os elementos $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 - 4i$. Escreva na forma $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) os seguintes resultados:

a) $2z_1 - 3z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

2. Determine a forma $a + bi$ das expressões:

a) $(2 - i)^2 + (3 + 4i)$

b) $(1 + 2i)(1 - 2i) - (2 - 3i)$

3. Efetue os seguintes quocientes, apresentando o resultado na forma algébrica:

a) $\frac{4 + 2i}{1 - i}$

b) $\frac{5}{2 + 3i}$

4. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões:

a) $\frac{(1 - i)^2}{2 + i}$

b) $\frac{3 + i}{3 - i} - \frac{3 - i}{3 + i}$

5. Dados $w_1 = 2 - 5i$ e $w_2 = -1 + i$, determine:

a) $w_1 \cdot \overline{w_2}$

b) $\frac{\overline{w_1}}{w_2}$

6. Simplifique cada uma das seguintes expressões:

a) $(3 - 2i)^2 - 4(1 - 3i)$

b) $\frac{1 + 3i}{2 - i} + \frac{2 - i}{i}$

7. Calcule os valores numéricos de:

a) $(1 + i)^4$

b) $(1 - i)^6$

8. Apresente na forma $a + bi$ o resultado de:

a) $\frac{2 + 5i}{i}$

b) $\frac{(2 - i)(1 + 3i)}{1 - 2i}$

9. Considere $z = \frac{a + 2i}{1 - 3i}$, com $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine z na forma $x + yi$ em função de a .

- b) Encontre o valor de a para o qual $\operatorname{Re}(z) = 0$.
10. Sejam $z_1 = 4 - i$ e $z_2 = 2 + 3i$. Escreva na forma $a + bi$:
- a) $\overline{z_1 \cdot z_2}$
b) $\frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_1 - z_2}$
11. Determine o valor simplificado das expressões:
- a) $i^{27} + i^{42}$
b) $i^{105} - 3i^{200} + 2i^{311}$
12. Simplifique:
- a) $\frac{i^{19} + i^{31}}{i^{44}}$
b) $2i^{13} \cdot (3i^{25} - i^{18})$
13. Determine a soma das seguintes sequências de potências:
- a) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{15}$
b) $i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{22}$
14. Escreva na forma algébrica os números:
- a) $\frac{3 + 2i^{17}}{i^{21}}$
b) $\frac{(1 - i^9)^3}{i^{14}}$
15. Sabendo que $n \in \mathbb{N}$, simplifique as expressões:
- a) i^{4n+3}
b) $i^{4n+2} - i^{4n}$
16. Calcule o valor de:
- a) $\sum_{k=1}^8 i^k$
b) $\frac{i^{50} + i^{100}}{i^{25}}$
17. Considere o elemento $w = (2k - 8) + (k^2 - 16)i$, onde $k \in \mathbb{R}$. Determine k de modo que w seja:
- a) um número real;
b) um número imaginário puro.
18. Dado $z = (m^2 - 5m + 6) + (m - 2)i$, com $m \in \mathbb{R}$, encontre m para que:
- a) z seja igual a zero;
b) z seja um número real não nulo.
19. Determine os valores reais de x e y que satisfazem cada uma das equações:
- a) $(3x - 1) + 4yi = 5 + 12i$
b) $(x + y) + (2x - y)i = 7 + 2i$
20. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:
- a) $(a^2 - 9) + (b + 1)i = 0$

- b) $2a + bi - 3 + 5i = 1 - 2i$
21. Considere $z = (p + 3) + (p^2 - 9)i$ com $p \in \mathbb{R}$. Determine p para que z pertença a:
- a) eixo real;
 - b) eixo imaginário.
22. Determine para que valores reais de k o quociente $\frac{k + 2i}{1 - i}$ é:
- a) um número real;
 - b) um número imaginário puro.
23. Considere $z = (x^2 - 1) + (x + 1)i$ com $x \in \mathbb{R}$.
- a) Indique a parte real e a parte imaginária de z para $x = -1$.
 - b) Determine x de modo a que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.
24. Determine $c \in \mathbb{R}$ de modo que o produto $(2 + ci)(3 - i)$ seja:
- a) um número real;
 - b) um número imaginário puro.
25. Resolva, em $\mathbb{C}$, cada uma das equações:
- a) $(1 + i)z = 4 - 2i$
 - b) $iz + 2 = 3 - i$
26. Resolva as seguintes equações envolvendo o conjugado $\bar{z}$:
- a) $z + 2\bar{z} = 6 - i$
 - b) $3z - \bar{z} = 4 + 8i$
27. Encontre a solução algébrica $z = x + yi$ para:
- a) $2z - i\bar{z} = 3 + 3i$
 - b) $(2 - i)z + \bar{z} = 5$
28. Resolva, em $\mathbb{C}$:
- a) $\frac{z}{1 - i} + 2i = 3$
 - b) $i(z - 2) = 2z + 1$
29. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:
- a) $z \cdot \bar{z} + z = 12 + 2i$
 - b) $\bar{z} - 3iz = 1 - i$
30. Resolva as equações:
- a) $(2 + i)\bar{z} - 5 = 0$
 - b) $z^2 = \bar{z}$ (apenas soluções na forma $a + bi$)
31. Encontre todos os elementos z que verificam:
- a) $\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Im}(z)i = 3 - 4i$
 - b) $z + \bar{z} + z \cdot \bar{z} = 8$ sabendo que $\operatorname{Im}(z) = 2$
32. Resolva as equações:

a) $\frac{z+1}{z-i} = 2$

b) $(1-2i)z + 3i = \bar{z}$

33. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações do segundo grau:

a) $z^2 + 25 = 0$

b) $z^2 - 6z + 13 = 0$

34. Determine as soluções de:

a) $2z^2 + 2z + 5 = 0$

b) $z^2 + 4z + 8 = 0$

35. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações incompletas:

a) $3z^2 + 48 = 0$

b) $z^3 + 4z = 0$

36. Encontre todas as soluções das equações:

a) $(z-2)^2 + 9 = 0$

b) $(z^2 + 4)(z-3) = 0$

37. Resolva em $\mathbb{C}$:

a) $z^4 - 81 = 0$

b) $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$

38. Determine as raízes de:

a) $4z^2 - 4z + 5 = 0$

b) $z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$

39. Considere a equação $z^2 - 2kz + k^2 + 4 = 0$ com $k \in \mathbb{R}$.

a) Resolva a equação para $k = 3$.

b) Mostre que a equação não admite raízes reais para nenhum valor de k .

40. Resolva o sistema de equações nas variáveis complexas z_1 e z_2 :

a)
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 - z_2 = 2i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 5 + i \\ z_1 - z_2 = 1 - 4i \end{cases}$$

41. Calcule o módulo dos seguintes elementos:

a) $z = 3 - 4i$

b) $w = \frac{1+2i}{2-i}$

42. Determine o módulo de:

a) $z = (2+3i)(1-i)$

b) $w = \frac{5-12i}{(1+i)^2}$

43. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que:

- a) $|x + 4i| = 5$
b) $|(x - 1) + 2i| = \sqrt{13}$
44. Encontre todos os elementos z que verificam simultaneamente:
- a) $|z| = 2$ e $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$
b) $|z| = 5$ e $\operatorname{Im}(z) = -4$
45. Determine o valor real de a de modo a que:
- a) $|a + 3i| = 5$
b) $\left| \frac{a + i}{1 - i} \right| = \sqrt{5}$
46. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações envolvendo módulos:
- a) $|z| + z = 3 + \sqrt{3}i$
b) $|z| - z = 2 - 4i$
47. Considere a condição $|z - 1| = |z - 3|$.
- a) Escreva a condição na forma $x + yi$ e simplifique-a.
b) Interprete geometricamente o conjunto de pontos obtido.
48. Considere $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$.
- a) Escreva a condição $|z + 2i| \leq 3$ em termos de x e y .
b) Identifique geometricamente a região representada.
49. Determine os números z tais que:
- a) $z \cdot \bar{z} = 25$ e $\operatorname{Re}(z) = 4$
b) $|z - i| = |z + 1|$
50. Mostre algebraicamente que, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
- a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$



Soluções dos Exercícios

1. a) $3 + 16i$
b) $11 - 10i$
2. a) 6
b) $3 + 3i$
3. a) $1 + 3i$
b) $\frac{10}{13} - \frac{15}{13}i$
4. a) $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$
b) $\frac{3}{5}i$
5. a) $-7 + 3i$
b) $-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i$
6. a) 1
b) $-1 + 3i$
7. a) -4
b) $8i$
8. a) $5 - 2i$
b) $3 + 4i$
9. a) $z = \frac{a-6}{10} + \frac{3a+2}{10}i$
b) $a = 6$
10. a) $11 - 10i$
b) $-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$
11. a) $-1 - i$
b) $-3 - i$
12. a) $-2i$
b) $-6 + 2i$
13. a) 0
b) $-1 + i$
14. a) $2 - 3i$
b) $-2 - 2i$
15. a) $-i$
b) -2
16. a) 0
b) 0
17. a) $k = \pm 4$
b) $k = 4$

18. a) $m = 2$
b) $m = 3$
19. a) $x = 2, y = 3$
b) $x = 3, y = 4$
20. a) $a = \pm 3, b = -1$
b) $a = 2, b = -7$
21. a) $p = \pm 3$
b) $p = -3$
22. a) $k = -2$
b) $k = 2$
23. a) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 0$
b) $x = 2 \quad \vee \quad x = -1$
24. a) $c = \frac{2}{3}$
b) $c = -6$
25. a) $z = 1 - 3i$
b) $z = -1 - i$
26. a) $z = 2 + i$
b) $z = 2 + 2i$
27. a) $z = 2 + i$
b) $z = 2 - 3i$
28. a) $z = 5 - i$
b) $z = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$
29. a) $z = 2 + 2i$
b) $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
30. a) $z = 2 - i$
b) $z = 0 \quad \vee \quad z = 1 \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
31. a) $z = 3 - 2i$
b) $z = 2 + 2i \quad \vee \quad z = -2 + 2i$
32. a) $z = 1 + 2i$
b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$
33. a) $z = \pm 5i$
b) $z = 3 \pm 2i$
34. a) $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$
b) $z = -2 \pm 2i$
35. a) $z = \pm 4i$
b) $z = 0 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
36. a) $z = 2 \pm 3i$

- b) $z = 3 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
37. a) $z = \pm 3 \quad \vee \quad z = \pm 3i$
b) $z = 3 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
38. a) $z = \frac{1}{2} \pm i$
b) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$
39. a) $z = 3 \pm 2i$
b) O discriminante $\Delta = 4k^2 - 4(k^2 + 4) = -16 < 0$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.
40. a) $z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$
b) $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + 3i$
41. a) $|z| = 5$
b) $|w| = 1$
42. a) $|z| = \sqrt{26}$
b) $|w| = \frac{13}{2}$
43. a) $x = \pm 3$
b) $x = 4 \quad \vee \quad x = -2$
44. a) $z = \sqrt{3} + i \quad \vee \quad z = \sqrt{3} - i$
b) $z = 3 - 4i \quad \vee \quad z = -3 - 4i$
45. a) $a = \pm 4$
b) $a = \pm 3$
46. a) $z = \sqrt{3}i$
b) $z = 3 + 4i$
47. a) $x = 2$
b) Mediatriz do segmento de reta de extremos $(1, 0)$ e $(3, 0)$, ou seja, a reta vertical $x = 2$.
48. a) $x^2 + (y + 2)^2 \leq 9$
b) Círculo/Círculo e interior de centro em $(0, -2)$ e raio $r = 3$.
49. a) $z = 4 + 3i \quad \vee \quad z = 4 - 3i$
b) Reta $y = -x$ (ou $x + y = 0$)
50. a) Demonstração direta por $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$.
b) Demonstração direta calculando $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$.