

Ficha de Trabalho 03 — Complexos

Ensino Secundário — 12.^o Ano

1. Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações quadráticas puras:

a) $z^2 + 16 = 0$

b) $4z^2 + 25 = 0$

2. Resolva as seguintes equações do 2.^o grau incompletas:

a) $z^2 - 6z = 0$

b) $2z^2 + 8iz = 0$

3. Determine em $\mathbb{C}$ as soluções das equações:

a) $(z - 3)^2 + 4 = 0$

b) $(2z + 1)^2 + 9 = 0$

4. Encontre todas as soluções das seguintes equações:

a) $3z^2 + 27 = 0$

b) $\frac{z^2 + 5}{2} = -2$

5. Resolva em $\mathbb{C}$:

a) $(z + i)^2 + 16 = 0$

b) $(3z - 2)^2 + 25 = 0$

6. Determine as raízes complexas de:

a) $z^2 + \frac{9}{4} = 0$

b) $5z^2 + 20 = 0$

7. Resolva as equações:

a) $(z - 1)^2 = -12$

b) $(z + 2i)^2 = -9$

8. Determine os números complexos z que satisfazem:

a) $z^2 - 4iz = 0$

b) $3z^2 + 12iz = 0$

9. Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações com a fórmula resolvente:

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

b) $z^2 + 2z + 2 = 0$

10. Encontre as soluções complexas das equações:

a) $z^2 - 6z + 13 = 0$

b) $z^2 + 4z + 13 = 0$

11. Resolva em $\mathbb{C}$:

a) $2z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $3z^2 + 6z + 4 = 0$

12. Determine os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que:

a) $z^2 - 2z + 10 = 0$

b) $4z^2 - 4z + 5 = 0$

13. Resolva as equações do segundo grau:

a) $z^2 + 8z + 25 = 0$

b) $z^2 - 10z + 29 = 0$

14. Encontre as raízes de:

a) $z^2 + 2\sqrt{2}z + 3 = 0$

b) $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

15. Resolva em $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 3z + 3 = 0$

b) $2z^2 + 3z + 2 = 0$

16. Determine as soluções das equações:

a) $z^2 - (2 + i)z = 0$

b) $z^2 - 4iz - 4 = 0$

17. Resolva em $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$

b) $z^2 - 6iz - 9 = 0$

18. Resolva as equações por fatorização:

a) $z^3 + 9z = 0$

b) $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$

19. Encontre todas as soluções das equações cúbicas:

a) $z^3 - 8 = 0$

b) $z^3 + 27 = 0$

20. Resolva em $\mathbb{C}$:

a) $(z^2 + 4)(z - 2) = 0$

b) $(z^2 - 2z + 5)(z + 3) = 0$

21. Determine as raízes de:

a) $z^4 - 16 = 0$

b) $z^4 + 81 = 0$

22. Resolva em $\mathbb{C}$ recorrendo à mudança de variável $u = z^2$:

a) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$

b) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$

23. Determine todas as soluções das equações:

- a) $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$
b) $z^3 + z^2 + 9z + 9 = 0$
- 24.** Resolva as equações de grau 4:
a) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$
b) $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$
- 25.** Sabendo que $z = 1$ é solução de $z^3 - 2z^2 + 5z - 4 = 0$, determine as restantes soluções.
a) Apresente o polinómio fatorizado.
b) Indique o conjunto de todas as soluções da equação.
- 26.** Sabendo que $z = 2i$ é raiz de $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$:
a) Justifique que $-2i$ também é raiz de $P(z)$.
b) Determine a terceira raiz de $P(z)$.
- 27.** Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações lineares:
a) $(2 - i)z = 5$
b) $(1 + 3i)z = 10i$
- 28.** Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:
a) $iz + 3 = 2z - i$
b) $\frac{z+1}{1-i} = 2 + 3i$
- 29.** Resolva as seguintes equações que envolvem o conjugado $\bar{z}$:
a) $z + 2\bar{z} = 9 + 2i$
b) $2z - \bar{z} = 3 + 6i$
- 30.** Encontre $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) que satisfaz:
a) $3z + \bar{z} = 8 - 4i$
b) $\bar{z} - 2z = 1 - 9i$
- 31.** Resolva em $\mathbb{C}$:
a) $i\bar{z} + 2z = 3 + 5i$
b) $(1 + i)z + \bar{z} = 4 + i$
- 32.** Determine os números complexos z tais que:
a) $(2 + i)\bar{z} = 5 - 5i$
b) $\frac{\bar{z}}{i} + 2z = 3$
- 33.** Resolva as equações:
a) $z \cdot \bar{z} + 3z = 10 + 6i$
b) $z^2 = \bar{z}$
- 34.** Encontre as soluções em $\mathbb{C}$:
a) $\bar{z} = z^2$
b) $(1 - 2i)z + 3i = \bar{z}$

35. Resolva a equação $2z - 3\bar{z} + 5 = 4i$.

- a) Determine a parte real de z .
- b) Escreva z na forma $a + bi$.

36. Resolva os sistemas de equações nas variáveis complexas z_1 e z_2 :

- a)
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ z_1 - z_2 = 3i \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 + 2i \\ z_1 - z_2 = 2 - 5i \end{cases}$$

37. Determine $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ que verificam:

- a)
$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + 4i \\ 2z_1 - z_2 = 7 - 2i \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} iz_1 + z_2 = 2 \\ z_1 - iz_2 = 0 \end{cases}$$

38. Resolva o sistema:

- a)
$$\begin{cases} z_1 + iz_2 = 3 \\ iz_1 + z_2 = 1 + 2i \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 1 + i \\ z_1 + z_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

39. Determine z e w tais que:

- a)
$$\begin{cases} z + w = 3 + 2i \\ z \cdot w = 5 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} z - w = 1 - i \\ z + 2w = 4 + 2i \end{cases}$$

40. Resolva os sistemas:

- a)
$$\begin{cases} (1 + i)z_1 + z_2 = 3 + i \\ z_1 - z_2 = 1 - i \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 2z_1 - iz_2 = 5 \\ z_1 + 2z_2 = 5i \end{cases}$$

41. Encontre $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que:

- a)
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} z_1 - z_2 = 4i \\ z_1 z_2 = 5 \end{cases}$$

42. Resolva o sistema:

- a)
$$\begin{cases} 3z_1 + iz_2 = 2 + 5i \\ z_1 - 2z_2 = -4 - 3i \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} z_1 + \overline{z_2} = 3 + 2i \\ \overline{z_1} + z_2 = 3 - 2i \end{cases}$$

43. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações com módulo:

a) $|z| + z = 4 + 2i$

b) $|z| - z = 3 - 3i$

44. Determine os números $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem:

a) $|z - 2| = |z + 4|$

b) $|z - i| = |z + 3i|$

45. Resolva as equações:

a) $|z|^2 + z = 6 + 2i$

b) $2|z| - z = 1 + 2i$

46. Considere a equação $z^2 - 2kz + k^2 + 9 = 0$, com $k \in \mathbb{R}$.

a) Resolva a equação em função de k .

b) Calcule o módulo das soluções obtidas.

47. Determine os valores de $p \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $z^2 + pz + 4 = 0$:

a) Admite duas soluções reais distintas.

b) Admite soluções não reais conjugadas.

48. Encontre todos os elementos $z \in \mathbb{C}$ tais que:

a) $|z| = 5$ e $\text{Re}(z) = 3$

b) $|z| = \sqrt{10}$ e $\text{Im}(z) = -1$

49. Considere a condição $|z - 1 - i| = 2$.

a) Determine a equação cartesiana correspondente no plano de Argand.

b) Indique se o número $z = 1 + 3i$ satisfaz esta condição.

50. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 + |z|^2 = 8 + 4i$.

a) Obtenha o sistema em x e y considerando $z = x + yi$.

b) Apresente as soluções na forma algébrica.

Soluções dos Exercícios

1. a) $z = \pm 4i$
b) $z = \pm \frac{5}{2}i$
2. a) $z = 0 \quad \vee \quad z = 6$
b) $z = 0 \quad \vee \quad z = -4i$
3. a) $z = 3 \pm 2i$
b) $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$
4. a) $z = \pm 3i$
b) $z = \pm 3i$
5. a) $z = 3i \quad \vee \quad z = -5i$
b) $z = \frac{2}{3} \pm \frac{5}{3}i$
6. a) $z = \pm \frac{3}{2}i$
b) $z = \pm 2i$
7. a) $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$
b) $z = \pm 3 - 2i$
8. a) $z = 0 \quad \vee \quad z = 4i$
b) $z = 0 \quad \vee \quad z = -4i$
9. a) $z = 2 \pm i$
b) $z = -1 \pm i$
10. a) $z = 3 \pm 2i$
b) $z = -2 \pm 3i$
11. a) $z = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$
b) $z = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$
12. a) $z = 1 \pm 3i$
b) $z = \frac{1}{2} \pm i$
13. a) $z = -4 \pm 3i$
b) $z = 5 \pm 2i$
14. a) $z = -\sqrt{2} \pm i$
b) $z = 2\sqrt{3} \pm 2i$
15. a) $z = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
b) $z = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$
16. a) $z = 0 \quad \vee \quad z = 2 + i$
b) $z = 2i$ (raiz dupla)
17. a) $z = i \quad \vee \quad z = -3i$
b) $z = 3i$ (raiz dupla)

18. a) $z = 0 \quad \vee \quad z = \pm 3i$
b) $z = 0 \quad \vee \quad z = 2 \pm i$
19. a) $z = 2 \quad \vee \quad z = -1 \pm \sqrt{3}i$
b) $z = -3 \quad \vee \quad z = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
20. a) $z = 2 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
b) $z = -3 \quad \vee \quad z = 1 \pm 2i$
21. a) $z = \pm 2 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
b) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$
22. a) $z = \pm 2 \quad \vee \quad z = \pm i$
b) $z = \pm i \quad \vee \quad z = \pm 2i$
23. a) $z = 3 \quad \vee \quad z = \pm 2i$
b) $z = -1 \quad \vee \quad z = \pm 3i$
24. a) $z = \pm 2i \quad \vee \quad z = \pm 3i$
b) $z = \pm 3 \quad \vee \quad z = \pm i$
25. a) $P(z) = (z - 1)(z^2 - z + 4)$
b) $z = 1 \quad \vee \quad z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$
26. a) Porque os coeficientes de $P(z)$ são reais.
b) $z = 3$
27. a) $z = 2 + i$
b) $z = 3 - i$
28. a) $z = -1 - 2i$
b) $z = 4 + i$
29. a) $z = 3 - 2i$
b) $z = 3 - 6i$
30. a) $z = 2 - i$
b) $z = -1 - 3i$
31. a) $z = 1 + 2i$
b) $z = 2 - i$
32. a) $z = 1 - 2i$
b) $z = 1 - i$
33. a) $z = 1 + 3i$
b) $z = 0 \quad \vee \quad z = 1 \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
34. a) $z = 0 \quad \vee \quad z = 1 \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$
35. a) $\text{Re}(z) = -5$
b) $z = -5 - \frac{4}{5}i$
36. a) $z_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i, z_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$

- b) $z_1 = 2 - i, z_2 = 4i$
37. a) $z_1 = 3, z_2 = -1 + 2i$
b) $z_1 = 0, z_2 = 2i$
38. a) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - 2i$
b) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 - 2i$
39. a) $(z, w) = (2 + i, 1 + i)$ ou $(z, w) = (1 + i, 2 + i)$
b) $z = 2, w = 1 + i$
40. a) $z_1 = 2, z_2 = 1 + i$
b) $z_1 = 2 + i, z_2 = -1 + 2i$
41. a) $(z_1, z_2) = (1 + i, 1 - i)$ ou $(z_1, z_2) = (1 - i, 1 + i)$
b) $(z_1, z_2) = (5i, i)$ ou $(z_1, z_2) = (-i, -5i)$
42. a) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2i - 1$
b) $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 + i$
43. a) $z = \frac{3}{2} - 2i$
b) $z = -2 + 3i$
44. a) Reta vertical $x = -1$
b) Reta horizontal $y = -i$ (isto é, $y = -1$)
45. a) $z = 2 - 2i$
b) $z = 1 - 2i$
46. a) $z = k \pm 3i$
b) $|z| = \sqrt{k^2 + 9}$
47. a) $p \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$
b) $p \in]-4, 4[$
48. a) $z = 3 + 4i \quad \vee \quad z = 3 - 4i$
b) $z = 3 - i \quad \vee \quad z = -3 - i$
49. a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
b) Sim, pois $(1 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4$.
50. a) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 4 \end{cases}$
b) $z = \sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}i \quad \vee \quad z = -\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}i$