

Ficha de Trabalho 04 — Complexos

Ensino Secundário — 12.^o Ano

1. Determine o módulo e o argumento principal de cada um dos seguintes números complexos:
 - a) $z_1 = 1 + i$
 - b) $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$
2. Calcule o módulo e o argumento principal de:
 - a) $z_1 = -3 - 3i$
 - b) $z_2 = 4i$
3. Para cada um dos seguintes números complexos, indique $|z|$ e $\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$:
 - a) $z_1 = 5$
 - b) $z_2 = -7$
4. Determine o argumento principal dos seguintes números complexos:
 - a) $z_1 = \sqrt{3} - i$
 - b) $z_2 = -i$
5. Sabendo que $z = -1 + \sqrt{3}i$, determine:
 - a) O módulo e o argumento principal de z .
 - b) O módulo e o argumento principal do seu conjugado $\bar{z}$.
6. Considere o número complexo $w = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$.
 - a) Escreva w na forma $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi[$.
 - b) Escreva w com o argumento principal em $]-\pi, \pi]$.
7. Determine o argumento principal do número complexo $z = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
 - a) Escreva z na forma trigonométrica padrão $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.
 - b) Indique o argumento principal de z .
8. Calcule o módulo e o argumento principal de $z = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
 - a) Converta a expressão para a forma $\cos \theta + i \sin \theta$.
 - b) Indique o valor de $\theta \in]-\pi, \pi]$.
9. Escreva na forma trigonométrica com $\theta \in [0, 2\pi[$ os números:
 - a) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$
 - b) $z_2 = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$
10. Represente na forma trigonométrica:
 - a) $z_1 = -\sqrt{3} - i$
 - b) $z_2 = 3 - 3i$
11. Passe para a forma algébrica os seguintes números complexos:

- a) $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
b) $z_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
12. Escreva na forma algébrica $a + bi$:
- a) $z_1 = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$
b) $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$
13. Escreva na forma trigonométrica os números reais e imaginários puros:
- a) $z_1 = -8$
b) $z_2 = 3i$
14. Represente na forma trigonométrica:
- a) $z_1 = -5i$
b) $z_2 = 12$
15. Considere $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.
- a) Escreva z na forma trigonométrica correta.
b) Escreva z na forma algébrica.
16. Dado $z = -3 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$:
- a) Escreva z na forma trigonométrica com $\rho > 0$.
b) Determine o argumento principal de z .
17. Escreva na forma trigonométrica com argumento em $[0, 2\pi[$:
- a) $z_1 = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$
b) $z_2 = 1 - \tan \left(\frac{\pi}{6} \right) i$
18. Considere o número complexo $z = -2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4} \right)$.
- a) Escreva z na forma algébrica.
b) Escreva z na forma trigonométrica.
19. Sejam $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ e $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.
- a) Calcule $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica.
b) Calcule $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.
20. Dados $z_1 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ e $z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$:
- a) Escreva $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica com argumento principal.
b) Escreva $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica.
21. Sejam $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)$ e $w = 5 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right)$.
- a) Determine o módulo de $z \cdot w$.
b) Determine o argumento principal de $\frac{z}{w}$.
22. Calcule o resultado das seguintes operações, apresentando-o na forma trigonométrica:
- a) $\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right] \cdot \left[3 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \right]$
b) $\frac{8 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}$

23. Dados $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ e $w = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$:
- Determine $z \cdot w$ na forma algébrica.
 - Determine $\frac{w}{z}$ na forma algébrica.
24. Considere $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{3} - i$.
- Escreva z_1 e z_2 na forma trigonométrica.
 - Calcule $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica e deduza o valor exato de $\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right)$.
25. Dados $u = -1 + \sqrt{3}i$ e $v = 1 + i$:
- Determine a forma trigonométrica de $u \cdot v$.
 - Deduza o valor exato de $\sin \left(\frac{11\pi}{12} \right)$.
26. Sabendo que $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$, determine na forma trigonométrica:
- O conjugado $\bar{z}$.
 - O inverso $\frac{1}{z}$.
27. Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, escreva na forma trigonométrica:
- $-z$
 - $\frac{\bar{z}}{z}$
28. Calcule recorrendo à fórmula de De Moivre:
- $\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6$
 - $(1 + i)^{10}$
29. Calcule e apresente na forma algébrica:
- $(\sqrt{3} - i)^8$
 - $(-1 + i)^{12}$
30. Determine na forma trigonométrica:
- z^4 sabendo que $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$
 - w^5 sabendo que $w = \sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi}{15} \right)$
31. Escreva na forma algébrica o valor de:
- $\frac{(1 + i)^6}{(\sqrt{3} - i)^3}$
 - $\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^{12}$
32. Considere $z = \cos \left(\frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} \right)$.
- Determine o menor número natural n tal que z^n é um número real estritamente negativo.
 - Determine o menor número natural n tal que $z^n = i$.
33. Dado $w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right)$:
- Escreva w^5 na forma algébrica.
 - Determine w^{-4} na forma trigonométrica.

34. Determine para que valores de $n \in \mathbb{N}$ o número z^n é imaginário puro, sendo $z = 1 - \sqrt{3}i$.
- Escreva z na forma trigonométrica.
 - Apresente a expressão geral dos valores de n .
35. Calcule o valor da expressão $\frac{(-1 + \sqrt{3}i)^9}{(1 - i)^6}$.
- Apresente o resultado na forma algébrica.
 - Indique o módulo do resultado.
36. Sabendo que $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, determine a forma trigonométrica de:
- $z^3 \cdot \bar{z}^2$
 - $\frac{z^5}{(-z)^2}$
37. Determine as raízes quadradas de $z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.
- Apresente as raízes na forma trigonométrica.
 - Apresente as raízes na forma algébrica.
38. Calcule as raízes cúbicas de $z = 8i$.
- Indique as raízes na forma trigonométrica com argumento em $[0, 2\pi[$.
 - Represente geometricamente no plano de Argand o polígono cujos vértices são estas raízes e determine a sua área.
39. Determine as raízes quartas de $z = -16$.
- Escreva as raízes na forma trigonométrica.
 - Escreva as raízes na forma algébrica.
40. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^3 + 27 = 0$.
- Apresente as soluções na forma trigonométrica.
 - Mostre que a soma das três soluções é igual a zero.
41. Resolva a equação $z^4 - 1 - \sqrt{3}i = 0$.
- Escreva $1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.
 - Obtenha as 4 soluções da equação na forma trigonométrica.
42. Considere as raízes de ordem 6 do número complexo $w = 64$.
- Escreva todas as soluções na forma trigonométrica.
 - Determine o perímetro do hexágono regular cujos vértices são os afixos dessas raízes.
43. Um dos vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência centrada na origem é o afixo do número $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.
- Determine a forma trigonométrica dos restantes dois vértices z_2 e z_3 .
 - Determine o valor do raio dessa circunferência.
44. Sabendo que $w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ é uma das raízes quintas de um número complexo z :
- Determine a forma trigonométrica de z .
 - Determine a raiz quinta de z cujo afixo pertence ao 3.^o quadrante.

45. Caracterize por meio de uma condição na variável complexa:

- a) A semirreta que parte da origem e passa pelo ponto de coordenadas $(-\sqrt{3}, 1)$.
- b) A região angular entre os argumentos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, inclusive, com módulo inferior ou igual a 3.

46. Descreva geometricamente o conjunto de pontos definido por:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 4 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \pi\}$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3 \wedge \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}\}$

47. Considere a condição $|z - 2i| \leq 2 \wedge \frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{6}$.

- a) Escreva na forma algébrica os pontos de interseção da fronteira das duas condições.
- b) Indique se o ponto $z = i$ pertence ao conjunto.

48. Determine a área da região do plano complexo definida por:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 4 \wedge \frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$$

- a) Indique a amplitude do ângulo do setor circular.
- b) Calcule o valor exato da área de A .

49. Considere $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ e $z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

- a) Calcule a distância entre os afijos de z_1 e z_2 .
- b) Calcule a área do triângulo cujos vértices são a origem e os afijos de z_1 e z_2 .

50. Seja $z = \rho \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ com $\rho > 0$.

- a) Determine para que valores de ρ o afixo de z^2 pertence à circunferência de equação $|z| = 9$.
- b) Para o valor de ρ encontrado em a), escreva z^2 na forma algébrica.

Soluções dos Exercícios

1. a) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$
b) $|z_2| = 4$, $\text{Arg}(z_2) = \frac{5\pi}{6}$
2. a) $|z_1| = 3\sqrt{2}$, $\text{Arg}(z_1) = -\frac{3\pi}{4}$
b) $|z_2| = 4$, $\text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$
3. a) $|z_1| = 5$, $\text{Arg}(z_1) = 0$
b) $|z_2| = 7$, $\text{Arg}(z_2) = \pi$
4. a) $|z_1| = 2$, $\text{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{6}$
b) $|z_2| = 1$, $\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{2}$
5. a) $|z| = 2$, $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$
b) $|\bar{z}| = 2$, $\text{Arg}(\bar{z}) = -\frac{2\pi}{3}$
6. a) $w = 8 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$
b) $\text{Arg}(w) = -\frac{3\pi}{4}$, $\log w = 8 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$
7. a) $z = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$
b) $\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6}$
8. a) $z = 1 \left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \sin \frac{7\pi}{10} \right)$
b) $\theta = \frac{7\pi}{10}$
9. a) $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
b) $z_2 = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
10. a) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$
b) $z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$
11. a) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$
b) $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
12. a) $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$
b) $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$
13. a) $z_1 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$
b) $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
14. a) $z_1 = 5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$
b) $z_2 = 12(\cos 0 + i \sin 0)$
15. a) $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$
b) $z = \sqrt{3} - i$
16. a) $z = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right)$
b) $\text{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{5}$
17. a) $z_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

- b) $z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$
18. a) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
b) $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
19. a) $z_1 \cdot z_2 = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$
b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$
20. a) $z_1 \cdot z_2 = 8 \left(\cos \left(-\frac{N\pi}{2} \right) \dots \right) = 8 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$
b) $\frac{z_1}{z_2} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{3} - i$
21. a) $|z \cdot w| = 2 \times 5 = 10$
b) $\text{Arg} \left(\frac{z}{w} \right) = \frac{3\pi}{5} - \frac{4\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$
22. a) $6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
b) $4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
23. a) $z \cdot w = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$
b) $\frac{w}{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2}i$
24. a) $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$
b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$, logo $\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
25. a) $u \cdot v = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$
b) $\sin \left(\frac{11\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
26. a) $\bar{z} = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right) = 4 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right)$
b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right)$
27. a) $-z = \rho(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$
b) $\frac{\bar{z}}{z} = 1(\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta))$
28. a) $8(\cos \pi + i \sin \pi) = -8$
b) $(\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) = 32i$
29. a) $2^8 \left(\cos \left(-\frac{8\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{8\pi}{6} \right) \right) = -128 + 128\sqrt{3}i$
b) $(\sqrt{2})^{12} \left(\cos \frac{36\pi}{4} + i \sin \frac{36\pi}{4} \right) = -64$
30. a) $z^4 = 16 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$
b) $w^5 = 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
31. a) $\frac{8i}{-8i} = -1$
b) $\frac{2^{12}(\cos(-4\pi) + i \sin(-4\pi))}{(\sqrt{2})^{12}(\cos(3\pi) + i \sin(3\pi))} = \frac{4096}{64 \times (-1)} = -64$
32. a) $\frac{n\pi}{9} = \pi + 2k\pi \implies n = 9$
b) $\frac{n\pi}{9} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies n = \frac{9}{2}$ (sem solução natural), menor n natural com argumento $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dá $n = 9$ se $k = 0.5$ (não), para $k = 2$: $\frac{9\pi}{2} \implies n = 9$ (real), para $k = 1$: $\frac{5\pi}{2} \implies n = \frac{45}{2}$. O menor $n \in \mathbb{N}$ com $\sin = 1, \cos = 0$ requer $n = 9 \left(\frac{1}{2} + 2k \right) \implies n = 4.5$ (impossível); se for $z^n = i$ não há n inteiro. Ajustando: n não existe em $\mathbb{N}$.
33. a) $w^5 = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i$
b) $w^{-4} = \frac{1}{16} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{5} \right) \right) = \frac{1}{16} \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \right)$

34. a) $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$
b) $-\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies n = 3 \left(-\frac{1}{2} - k \right)$, logo $n = 3(2m+1)/2$ não é inteiro. Portanto $n = 3k + \frac{3}{2}$ não dá inteiros; não existem soluções inteiras.
35. a) $\frac{2^9 i}{8i} = 64$
b) Módulo = 64
36. a) $\rho^5 (\cos \theta + i \sin \theta)$
b) $\rho^3 (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$
37. a) $w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, $w_2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$
b) $w_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $w_2 = -1 - \sqrt{3}i$
38. a) $w_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$
b) Triângulo equilátero de raio $R = 2$. Área = $\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3}$
39. a) $w_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
b) $w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $w_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $w_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $w_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
40. a) $z = 27(\cos \pi + i \sin \pi)$, raízes: $w_k = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \dots \right)$
b) $w_0 + w_1 + w_2 = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 0$
41. a) $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
b) $z_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) \right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
42. a) $w_k = 2 \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
b) Hexágono de lado $L = 2$. Perímetro = $6 \times 2 = 12$
43. a) $z_2 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$, $z_3 = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$
b) Raio $r = 2$
44. a) $z = (w_0)^5 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$
b) Para $k = 2$: $w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{49\pi}{60} + i \sin \frac{49\pi}{60} \right)$ (no 2.^o quadrante); para $k = 3$: $w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{73\pi}{60} + i \sin \frac{73\pi}{60} \right)$ (no 3.^o quadrante)
45. a) $\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6} \wedge |z| > 0$
b) $0 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$
46. a) Arco de circunferência de raio 4 no 2.^o quadrante.
b) Segmento de reta no 4.^o quadrante de comprimento 2 entre os raios 1 e 3 na semirreta de ângulo $-\frac{\pi}{3}$.
47. a) Interseção das semirretas com a circunferência: $z = \sqrt{3} + i$ e $z = -\sqrt{3} + i$
b) Sim, pois $|i - 2i| = 1 \leq 2$ e $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$.
48. a) Amplitude $\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ radianos.
b) Área = $\frac{1}{2} \theta (R^2 - r^2) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times (16 - 4) = 3\pi$
49. a) $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Distância = $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$
b) Área = $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$
50. a) $|z^2| = \rho^2 = 9 \implies \rho = 3$
b) $z^2 = 9 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2}i$