

Ficha de Trabalho 05 — Complexos

Ensino Secundário — 12.^o Ano

1. Considere os números $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ e $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.
 - a) Calcule $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica com o argumento principal em $[0, 2\pi[$.
 - b) Escreva o produto $z_1 \cdot z_2$ na forma algébrica $a + bi$.
2. Sejam $w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ e $w_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.
 - a) Determine o módulo e o argumento principal do produto $w_1 \cdot w_2$.
 - b) Apresente $w_1 \cdot w_2$ na forma $a + bi$.
3. Calcule o produto dos números $z = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ e $u = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$.
 - a) Escreva o resultado na forma trigonométrica com o argumento pertencente a $] - \pi, \pi]$.
 - b) Indique a que quadrante pertence o afixo de $z \cdot u$.
4. Considere $z_1 = 5 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right)$ e $z_2 = \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}$.
 - a) Determine $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica com argumento em $[0, 2\pi[$.
 - b) Calcule o valor exato do módulo do produto.
5. Dados $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ e $w = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$:
 - a) Obtenha a forma trigonométrica de $z \cdot w$.
 - b) Indique o valor exato da parte real de $z \cdot w$.
6. Sejam $a = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$ e $b = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.
 - a) Determine o produto $a \cdot b$ na forma trigonométrica.
 - b) Justifique que $a \cdot b$ é um número real estritamente positivo.
7. Sabendo que $z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ e $z_2 = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right)$:
 - a) Simplifique a expressão $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica.
 - b) Determine a forma algébrica de $z_1 \cdot z_2$.
8. Considere três números $u = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$, $v = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ e $w = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.
 - a) Determine o produto $u \cdot v \cdot w$ na forma trigonométrica.
 - b) Apresente $u \cdot v \cdot w$ na forma $a + bi$.
9. Dados $z_1 = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ e $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$:
 - a) Determine o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.
 - b) Escreva $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica.
10. Considere $w_1 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ e $w_2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.
 - a) Calcule $\frac{w_1}{w_2}$ apresentando o argumento no intervalo $] - \pi, \pi]$.
 - b) Indique o valor da parte imaginária do quociente.

11. Sejam $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ e $u = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \sin \frac{7\pi}{10} \right)$.
- Determine a forma trigonométrica do quociente $\frac{z}{u}$.
 - Represente $\frac{z}{u}$ na forma $a + bi$.
12. Dados $a = 10 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$ e $b = 5 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$:
- Determine a forma trigonométrica de $\frac{a}{b}$.
 - Escreva o quociente na forma algébrica.
13. Considere $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right)$ e $z_2 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)$.
- Escreva $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica com argumento principal em $[0, 2\pi[$.
 - Indique a que quadrante pertence o afixo de $\frac{z_1}{z_2}$.
14. Calcule o valor exato da expressão $\frac{z}{w}$ sendo $z = \sqrt{6} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ e $w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.
- Apresente o quociente na forma trigonométrica.
 - Escreva o resultado na forma $a + bi$.
15. Sejam $z_1 = 12 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$ e $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.
- Determine o argumento principal de $\frac{z_1}{z_2}$.
 - Calcule a forma algébrica de $\frac{z_1}{z_2}$.
16. Se $z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right)$ e $w = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{14} + i \sin \frac{9\pi}{14} \right)$:
- Determine a forma trigonométrica do inverso de $\frac{z}{w}$.
 - Indique o módulo de $\frac{w}{z}$.
17. Sabendo que $u = \rho_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ e $v = \rho_2 (\cos \beta + i \sin \beta)$, simplifique:
- A expressão de $\frac{u \cdot v}{u}$ na forma trigonométrica.
 - Determine o módulo de $\frac{u^2}{v}$.
18. Seja $z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$.
- Escreva o conjugado $\bar{z}$ na forma trigonométrica com argumento em $[0, 2\pi[$.
 - Escreva o oposto $-z$ na forma trigonométrica com argumento em $[0, 2\pi[$.
19. Dado $w = \sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$:
- Apresente o inverso $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica com argumento principal em $] -\pi, \pi]$.
 - Determine a forma algébrica do produto $w \cdot \bar{w}$.
20. Considere $z = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.
- Apresente $\bar{z}$ na forma trigonométrica com argumento em $[0, 2\pi[$.
 - Calcule $\frac{z}{\bar{z}}$ na forma trigonométrica.

21. Sabendo que $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right)$:
- Determine a forma trigonométrica de $-\bar{z}$.
 - Justifique em que quadrante se localiza o afixo de $-\bar{z}$.
22. Considere o número complexo $u = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$.
- Escreva o inverso $\frac{1}{u}$ na forma trigonométrica.
 - Determine a forma algébrica do oposto do inverso, $-\frac{1}{u}$.
23. Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, escreva na forma trigonométrica:
- $\frac{1}{\bar{z}}$
 - $-z \cdot \bar{z}$
24. Para $w = 6 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$, calcule na forma trigonométrica:
- $w \cdot \bar{w}$
 - $\frac{-w}{\bar{w}}$
25. Dado $z = 3 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$:
- Escreva $-z$ na forma algébrica.
 - Escreva $\bar{z}$ na forma algébrica.
26. Calcule utilizando a Fórmula de De Moivre:
- $\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right]^4$ na forma algébrica.
 - $\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \right]^6$ na forma trigonométrica.
27. Considere $z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right)$.
- Escreva z^3 na forma algébrica.
 - Determine a forma trigonométrica de z^6 .
28. Dado o número $w = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} \right)$:
- Determine a forma trigonométrica de w^5 .
 - Escreva w^5 na forma algébrica.
29. Calcule a expressão na forma trigonométrica e algébrica:
- $\left(2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{-3}$
 - $\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^8$
30. Sabendo que $z = \cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}$:
- Determine o menor número natural $n > 0$ para o qual z^n é um número real estritamente negativo.
 - Determine o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $z^n = i$.
31. Considere $u = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right)$.
- Determine o argumento de u^4 no intervalo $[0, 2\pi[$.
 - Calcule $\frac{u^6}{27}$ na forma algébrica.

32. Simplifique a expressão $\frac{[2(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})]^6}{[4(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})]^2}$:
- Apresente o resultado na forma trigonométrica.
 - Apresente o resultado na forma algébrica.
33. Dado $z = 2(\cos \frac{5\pi}{14} + i \sin \frac{5\pi}{14})$:
- Determine o menor natural n tal que z^n é um número imaginário puro com parte imaginária negativa.
 - Para esse valor de n , calcule $|z^n|$.
34. Determine na forma $a + bi$ o valor da expressão:
- $[\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})]^8$
 - $[\frac{1}{2}(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})]^{-4}$
35. Seja $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- Mostre que $z^n \cdot (\bar{z})^n = \rho^{2n}$.
 - Escreva a forma trigonométrica de $\frac{z^4}{(\bar{z})^2}$.
36. Determine as raízes quadradas do número complexo $z = 9(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$.
- Apresente-as na forma trigonométrica com argumentos em $[0, 2\pi[$.
 - Escreva as soluções na forma algébrica.
37. Calcule as raízes cúbicas de $w = 27(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$.
- Escreva todas as raízes na forma trigonométrica.
 - Determine o módulo comum a todas as raízes cúbicas.
38. Encontre as raízes quartas do número $u = 16(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5})$.
- Apresente as 4 soluções na forma trigonométrica.
 - Indique qual das raízes tem o seu afixo no 1.^o quadrante.
39. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.
- Apresente as soluções na forma trigonométrica.
 - Escreva na forma algébrica a solução cujo afixo pertence ao 2.^o quadrante.
40. Considere a equação $z^4 = 81(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$.
- Indique a expressão geral das raízes na forma trigonométrica.
 - Determine a soma de todas as raízes obtidas.
41. Calcule as raízes quintas de $z = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})$.
- Apresente as raízes com argumento principal em $] -\pi, \pi]$.
 - Identifique qual das raízes é um número imaginário puro.
42. Determine as raízes cúbicas do número $z = -8i$, passando primeiro z para a forma trigonométrica.
- Escreva z na forma trigonométrica.
 - Escreva as 3 raízes na forma algébrica.

43. Sabendo que $z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ é uma das raízes cúbicas de Z :
- Determine a forma trigonométrica do número Z .
 - Escreva as restantes duas raízes cúbicas de Z na forma trigonométrica.
44. Calcule o valor exato da expressão $E = \frac{z_1 \cdot z_2^2}{z_3}$, sendo: $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ e $z_3 = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$.
- Escreva E na forma trigonométrica.
 - Escreva E na forma algébrica.
45. Sejam $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ e $z_2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.
- Calcule a distância entre os afijos de z_1 e z_2 .
 - Determine a forma trigonométrica da soma $z_1 + z_2$.
46. Três vértices consecutivos de um polígono regular no plano de Argand são os afijos das raízes de ordem n do número $Z = 64 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$. Sabendo que uma das raízes é $w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$:
- Determine o valor do número de lados n .
 - Calcule o perímetro do polígono regular cujos vértices são as raízes de ordem n .
47. Dado o complexo $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$:
- Determine a forma trigonométrica de $w = \frac{z^5}{\bar{z}}$.
 - Qual é o módulo de w ?
48. Considere a expressão $A(k) = \left(\cos \frac{k\pi}{6} + i \sin \frac{k\pi}{6} \right)^3$ para $k \in \mathbb{Z}$.
- Simplifique $A(k)$ recorrendo à fórmula de De Moivre.
 - Determine os valores de $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para os quais $A(k)$ é imaginário puro.
49. Considere a figura formada pelas raízes quartas de um número complexo W . Sabendo que um dos vértices do quadrado resultante é o ponto de coordenadas $(0, 3)$:
- Escreva na forma trigonométrica a raiz representada por esse ponto.
 - Determine a forma trigonométrica e algébrica do número W .
50. Seja $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.
- Determine o valor do produto $(z \cdot i)^6$ na forma algébrica.
 - Determine a forma trigonométrica de $\frac{z^3}{i}$.

Soluções dos Exercícios

1. a) $z_1 \cdot z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
b) $z_1 \cdot z_2 = 6i$
2. a) Módulo = 4; Argumento principal = $\frac{7\pi}{12}$ (ou $-\frac{5\pi}{12}$ se centrado, em $[0, 2\pi[$ dá $\frac{19\pi}{12}$; aqui $\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$)
b) $w_1 \cdot w_2 = 4 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt{6} - \sqrt{2} + (-\sqrt{6} - \sqrt{2})i$
3. a) $\frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{18\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$, logo $2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$
b) Pertence ao eixo imaginário negativo (entre o 3.^o e 4.^o quadrantes).
4. a) $5 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right)$
b) $|z_1 \cdot z_2| = 5$
5. a) $z \cdot w = 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
b) Parte real = 0
6. a) $a \cdot b = 6 (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 6(\cos 0 + i \sin 0)$
b) $a \cdot b = 6 > 0$, que é real positivo.
7. a) $z_1 \cdot z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
b) $4i$
8. a) $u \cdot v \cdot w = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
b) $2\sqrt{2}i$
9. a) $\frac{z_1}{z_2} = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
b) $3i$
10. a) $\frac{w_1}{w_2} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$
b) Parte imaginária = -2
11. a) $\frac{z}{u} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$
b) $-\frac{1}{2}i$
12. a) $\frac{a}{b} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$
b) $-\sqrt{3} + i$
13. a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ (pois $\frac{\pi}{10} - \frac{3\pi}{5} = -\frac{5\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}$)
b) Eixo imaginário negativo.
14. a) $\frac{z}{w} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
b) $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$
15. a) $\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$, logo o argumento principal é $-\frac{\pi}{2}$
b) $4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -4i$

16. a) $\frac{w}{z} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{14} + i \sin \frac{5\pi}{14} \right)$
b) Módulo = $\frac{1}{2}$
17. a) $\rho_2 (\cos(2\alpha + \beta) + i \sin(2\alpha + \beta))$
b) Módulo = $\frac{\rho_1^2}{\rho_2}$
18. a) $\bar{z} = 4 \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \right)$
b) $-z = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right)$
19. a) $\frac{1}{w} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$
b) $w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 3$
20. a) $\bar{z} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
b) $\frac{z}{\bar{z}} = 1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$
21. a) $-\bar{z} = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$
b) Localiza-se no 1.^o quadrante, pois $0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.
22. a) $\frac{1}{u} = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
b) $-\frac{1}{u} = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
23. a) $\frac{1}{\rho} (\cos \theta + i \sin \theta)$
b) $\rho^2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -\rho^2$
24. a) $36(\cos 0 + i \sin 0) = 36$
b) $1 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} \right)$
25. a) $-z = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
b) $\bar{z} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
26. a) $4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$
b) $64 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
27. a) $z^3 = 3\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
b) $z^6 = 27 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$
28. a) $w^5 = 32 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$
b) $w^5 = -32i$
29. a) $\frac{1}{8} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{2}}{16}i$
b) $1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
30. a) $\frac{n\pi}{15} = \pi \implies n = 15$
b) $\frac{n\pi}{15} = \frac{\pi}{2} \implies n = \frac{15}{2}$ (não natural); para ter argumento $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $n = 15(\frac{1}{2} + 2k)$; com $k = 1$, $n = \frac{75}{2}$ (não natural); para $n \in \mathbb{N}$ par, $n = 15 \times 0.5$ não dá. Se $z^n = i$, não existe $n \in \mathbb{N}$ pós-simplificação exata. Menor natural para $z^n \in i\mathbb{R}^-$ é $n = 45/2 \rightarrow$ Ajuste: $n = 15k + 7.5$, não há n inteiro.
31. a) Argumento = $\frac{8\pi}{9}$

- b) $\frac{729(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})}{27} = 27 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{27}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}i$
32. a) $\frac{64(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})}{16(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})} = 4(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$
b) $4 \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i \right) = (\sqrt{2}-\sqrt{6}) + (\sqrt{2}+\sqrt{6})i$
33. a) $\frac{5n\pi}{14} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \implies \frac{5n}{14} = \frac{3}{2} \implies 10n = 42 \implies$ para $k = 1, \frac{5n}{14} = \frac{7}{2} \implies 10n = 98$; para $k = 2, \frac{5n}{14} = \frac{11}{2} \implies 10n = 154$; para $k = 3, \frac{5n}{14} = \frac{15}{2} \implies n = 21$.
b) $|z^{21}| = 2^{21} = 2097152$
34. a) $(\sqrt{2})^8 (\cos(10\pi) + i \sin(10\pi)) = 16(\cos 0 + i \sin 0) = 16$
b) $2^4 (\cos(\frac{22\pi}{3}) + i \sin(\frac{22\pi}{3})) = 16(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -8 - 8\sqrt{3}i$
35. a) $z^n \cdot (\bar{z})^n = (z \cdot \bar{z})^n = (|z|^2)^n = (\rho^2)^n = \rho^{2n}$
b) $\rho^2 (\cos(6\theta) + i \sin(6\theta))$
36. a) $w_0 = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), w_1 = 3(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$
b) $w_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, w_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
37. a) $z_k = 3(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})),$ para $k \in \{0, 1, 2\}$. ($z_0 = 3\text{cis} \frac{\pi}{4}, z_1 = 3\text{cis} \frac{11\pi}{12}, z_2 = 3\text{cis} \frac{19\pi}{12}$)
b) Módulo = 3
38. a) $u_k = 2(\cos(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2})), k \in \{0, 1, 2, 3\}$
b) $u_0 = 2(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}),$ pois $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$.
39. a) $z_k = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})), k \in \{0, 1, 2\}$
b) Para $k = 0: z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$ (pertence ao 1.^o quadrante); para $k = 1: z_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$; para $k = 2: z_2 = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i$.
40. a) $z_k = 3(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})), k \in \{0, 1, 2, 3\}$
b) A soma de todas as raízes n -ésimas de qualquer número complexo ($n \geq 2$) é 0.
41. a) $z_k = 1(\cos(-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) + i \sin(-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})), k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
b) Para $k = 4: z_4 = 1(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = -i$ (imaginário puro).
42. a) $z = 8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$
b) $w_0 = \sqrt{3} + i, w_1 = -\sqrt{3} + i, w_2 = -2i$
43. a) $Z = (z_0)^3 = 8(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})$
b) $z_1 = 2(\cos \frac{19\pi}{24} + i \sin \frac{19\pi}{24}), z_2 = 2(\cos \frac{35\pi}{24} + i \sin \frac{35\pi}{24})$
44. a) $E = \frac{2 \times 2}{4}(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{12}) + i \sin(0)) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$
b) $E = 1$
45. a) $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ e $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$. Distância = $|z_1 - z_2| = |4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$
b) $z_1 + z_2 = 4i = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
46. a) $w_0^n = Z \implies 2^n = 64 \implies n = 6$
b) Polígono regular de 6 lados (hexágono) inscrito num círculo de raio $R = 2$. O lado do hexágono é $L = R = 2$. Perímetro = $6 \times 2 = 12$.

47. a) $w = \frac{4\sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi)}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{5}) + i \sin(-\frac{\pi}{5}))} = 4(\cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5})$
b) $|w| = 4$
48. a) $A(k) = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$
b) É imaginário puro se $\cos \frac{k\pi}{2} = 0$, ou seja, $k \in \{1, 3, 5\}$.
49. a) $(0, 3) \equiv 3i = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
b) $W = (3i)^4 = 81(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 81$
50. a) $z \cdot i = 2(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$. Logo $(z \cdot i)^6 = 64(\cos \frac{42\pi}{12} + i \sin \frac{42\pi}{12}) = 64(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2}) = -64i$
b) $\frac{z^3}{i} = \frac{8(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} = 8(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = 8(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$