

Ficha de Trabalho 01 — Modelos Matemáticos

Ensino Secundário — 10.^o Ano

Exercícios Propostos: Modelos Matemáticos nas Eleições e Partilha

- Numa votação com 1200 eleitores para a eleição da Direção de uma associação, registaram-se 1150 votos válidos, 30 votos em branco e 20 votos nulos.
 - Determine o número mínimo de votos necessários para obter maioria absoluta.
 - Se a lista mais votada obteve 568 votos, alcançou a maioria absoluta? Justifique.
- Os resultados do 1.^o sufrágio para a escolha do Diretor de um agrupamento de escolas foram os seguintes:

Candidato	N. ^o de Votos
Candidato A	142
Candidato B	98
Candidato C	65
Branco / Nulos	15

- Indique qual o candidato vencedor se o método aplicado for o da maioria simples.
 - Indique se haveria necessidade de uma segunda volta num sistema de maioria absoluta e, em caso afirmativo, quais os candidatos que a disputariam.
- Numa assembleia municipal com 45 deputados votaram-se três propostas (P_1 , P_2 e P_3). Sabendo que P_1 obteve 21 votos, P_2 obteve 14 votos, P_3 obteve 8 votos e registaram-se 2 abstenções:
 - Calcule a percentagem de votos válidos obtida pela proposta P_1 .
 - A proposta P_1 foi aprovada por maioria absoluta? Justifique.
 - Três alunos (A , B e C) candidataram-se a delegado de turma. Os 28 alunos da turma ordenaram a sua preferência num boletim de voto. A tabela de preferências obtida foi a seguinte:

N. ^o de alunos	10	8	6	4
1. ^a Preferência	A	B	C	B
2. ^a Preferência	B	C	A	A
3. ^a Preferência	C	A	B	C

Determine o vencedor do sufrágio aplicando o Método de Borda (atribuindo 3 pontos ao 1.^o lugar, 2 ao 2.^o e 1 ao 3.^o).

- Num concurso para escolher o logótipo de um clube desportivo, 50 membros pontuaram quatro propostas (L_1, L_2, L_3, L_4) atribuindo 4, 3, 2 e 1 pontos do 1.^o ao 4.^o lugar, respetivamente. A tabela de pontuação ponderada revelou as seguintes pontuações finais:

$$L_1 : 145 \text{ pontos}, \quad L_2 : 162 \text{ pontos}, \quad L_3 : 110 \text{ pontos}, \quad L_4 : 83 \text{ pontos}$$

- Qual a proposta vencedora pelo Método de Borda?

- (b) Qual o número total de pontos distribuídos por todos os eleitores?
6. Quatro restaurantes (R_1, R_2, R_3, R_4) foram avaliados por uma comissão de 15 jurados através de uma ordenação de preferências (4 pontos para o 1.^o até 1 ponto para o 4.^o). A distribuição dos boletins foi:

N. ^o de Jurados	6	5	4
1. ^a Opção	R_1	R_2	R_3
2. ^a Opção	R_2	R_3	R_1
3. ^a Opção	R_3	R_1	R_2
4. ^a Opção	R_4	R_4	R_4

Calcule a pontuação total obtida pelo restaurante R_1 e pelo restaurante R_2 .

7. Numa eleição concelhia com 5 mandatos a atribuir pelo **Método de d'Hondt**, concorreram quatro listas com as seguintes votações:

Lista	Votos
Lista A	12 000
Lista B	7 500
Lista C	4 500
Lista D	2 000

Apresente a tabela de quocientes e determine a distribuição final dos 5 mandatos.

8. Um conselho geral com 7 lugares disponíveis deve ser preenchido por representantes de três listas (X, Y, Z) que obtiveram 3500, 2100 e 1200 votos, respetivamente. Aplique o **Método de d'Hondt** para atribuir os 7 mandatos.
9. Numa freguesia vão atribuir-se 4 mandatos utilizando o **Método de Saint-Laguë** (divisores 1, 3, 5, 7, ...). Os votos obtidos pelas três listas concorrentes foram:

Lista	Votos
Lista P	9 000
Lista Q	5 400
Lista R	2 700

Construa a tabela de quocientes e determine quantos mandatos obtém cada lista.

10. Compare o resultado da atribuição de 4 mandatos entre as listas M (10 000 votos), N (4 200 votos) e O (1 800 votos) utilizando:
- O Método de d'Hondt.
 - O Método de Saint-Laguë.
11. Uma empresa com 120 computadores portáteis pretende distribuí-los por três departamentos (A, B, C) de forma proporcional ao número de funcionários. O departamento A tem 50 funcionários, o B tem 30 e o C tem 20.
- Determine quantos computadores cabem a cada departamento.
 - Se a distribuição fosse efetuada pelo Método de d'Hondt para distribuir 6 novos computadores adicionais, quantos receberia cada um?
12. Numa eleição para uma Junta de Freguesia com 9 mandatos, a Lista A obteve 2400 votos e a Lista B obteve 1600 votos. Não existiram outras listas com votos significativos. Utilize o **Método de d'Hondt** para determinar a composição final da Junta.

13. Considere a seguinte tabela incompleta de apuramento de mandatos pelo **Método de d'Hondt** para 4 lugares:

Divisor	Lista Alfa (4800 v)	Lista Beta (3200 v)	Lista Gama (1600 v)
: 1	4800	3200	1600
: 2	2400	1600	800
: 3	1600	1066,7	533,3

Indique a ordem cronológica de atribuição dos 4 mandatos e qual a lista que fica sem qualquer mandato.

14. Numa votação preferencial com três candidatos (K, L, M) e 30 votantes, aplicou-se o Método de Borda com a atribuição de 3, 2, 1 pontos. Sabendo que o candidato K obteve 75 pontos e o candidato L obteve 60 pontos, determine a pontuação obtida pelo candidato M .
15. Um grémio académico realizou uma votação para a escolha de um orador convidado entre três personalidades (P_1, P_2, P_3). Os resultados das preferências foram:

N.º de Votantes	12	10	8
1.ª Opção	P_1	P_2	P_3
2.ª Opção	P_2	P_3	P_2
3.ª Opção	P_3	P_1	P_1

- (a) Quem venceria por maiorias simples considerando apenas a 1.ª opção?
- (b) Quem vence aplicando o Método de Borda (3, 2, 1 pontos)?
16. Numa eleição autárquica com 3 mandatos a distribuir pelo **Método de Saint-Laguë**, concorreram as listas A (8000 votos), B (3000 votos) e C (1000 votos). Determine a distribuição dos mandatos.
17. Uma associação cultural tem 30 bilhetes para um espetáculo para distribuir por 3 núcleos regionais (N_1, N_2, N_3) com 150, 90 e 60 associados, respetivamente. Calcule a distribuição proporcional exata dos bilhetes.
18. Numa eleição com 10 000 votantes inscritos, registou-se uma abstenção de 25%. Dos votos emitidos, 5% foram brancos ou nulos.
- (a) Quantos votos válidos foram expressos?
- (b) Qual o número mínimo de votos que garante a maioria absoluta neste sufrágio?
19. Três candidaturas (C_1, C_2, C_3) obtiveram num determinado círculo eleitoral os seguintes resultados: $C_1 = 15\,000$ votos, $C_2 = 9\,000$ votos, $C_3 = 4\,000$ votos. Aplique o **Método de d'Hondt** para distribuir 3 mandatos.
20. Numa eleição com 6 mandatos em disputa, a tabela pelo Método de Saint-Laguë gerou os seguintes quocientes iniciais:

Divisor	Lista M (15 000 v)	Lista N (9 000 v)
: 1	15 000	9 000
: 3	5 000	3 000
: 5	3 000	1 800
: 7	2 142,9	1 285,7

Determine a repartição final dos 6 mandatos entre as duas listas.

Soluções dos Exercícios

1. (a) Votos válidos = 1150. Maioria absoluta = $\lfloor \frac{1150}{2} \rfloor + 1 = 575 + 1 = 576$ votos.
(b) Não, pois obteve 568 votos, valor inferior a 576 votos.
2. (a) Vencedor por maioria simples: **Candidato A** (com 142 votos, o valor mais elevado).
(b) Votos válidos = $142 + 98 + 65 = 305$. Maioria absoluta = 153 votos. Como nenhum atingiu 153 votos, haveria segunda volta entre o **Candidato A** e o **Candidato B**.
3. (a) Votos válidos = $21 + 14 + 8 = 43$. Percentagem de $P_1 = \frac{21}{43} \times 100 \approx 48,84\%$.
(b) Não, pois obteve menos de 50% dos votos válidos ($21 < 22$).

4. Cálculo dos pontos pelo Método de Borda:

- **Aluno A:** $10 \times 3 + 8 \times 1 + 6 \times 2 + 4 \times 2 = 30 + 8 + 12 + 8 = 58$ pontos.
- **Aluno B:** $10 \times 2 + 8 \times 3 + 6 \times 1 + 4 \times 3 = 20 + 24 + 6 + 12 = 62$ pontos.
- **Aluno C:** $10 \times 1 + 8 \times 2 + 6 \times 3 + 4 \times 1 = 10 + 16 + 18 + 4 = 48$ pontos.

Vencedor: Aluno B (62 pontos).

5. (a) **Proposta vencedora:** Proposta L_2 (162 pontos).
(b) Total de pontos = $50 \text{ eleitores} \times (4 + 3 + 2 + 1) = 50 \times 10 = 500$ pontos.
6. • **Restaurante R_1 :** $6 \times 4 + 5 \times 2 + 4 \times 3 = 24 + 10 + 12 = 46$ pontos.
• **Restaurante R_2 :** $6 \times 3 + 5 \times 4 + 4 \times 2 = 18 + 20 + 8 = 46$ pontos.

Ambos obtiveram **46 pontos**.

7. Tabela pelo Método de d'Hondt:

Divisor	Lista A	Lista B	Lista C	Lista D
: 1	12 000 (1. ^o)	7 500 (2. ^o)	4 500 (4. ^o)	2000
: 2	6 000 (3. ^o)	3750	2250	1000
: 3	4 000 (5. ^o)	2500	1500	666,7

Distribuição de mandatos: Lista A = 3 mandatos; Lista B = 1 mandato; Lista C = 1 mandato; Lista D = 0 mandatos.

8. Quocientes ordenados (Método d'Hondt): 1.^o 3500 (X), 2.^o 2100 (Y), 3.^o 1750 (X), 4.^o 1200 (Z), 5.^o 1166,7 (X), 6.^o 1050 (Y), 7.^o 875 (X).
Atribuição: **Lista X:** 4 mandatos; **Lista Y:** 2 mandatos; **Lista Z:** 1 mandato.

9. Quocientes pelo Método de Saint-Laguë (divisores 1, 3, 5):

- Lista P: : 1 = **9000** (1.^o), : 3 = **3000** (3.^o), : 5 = 1800.
- Lista Q: : 1 = **5400** (2.^o), : 3 = 1800.
- Lista R: : 1 = **2700** (4.^o).

Atribuição: Lista P = 2 mandatos; Lista Q = 1 mandato; Lista R = 1 mandato.

10. (a) **d'Hondt:** Quocientes: 10 000 (M, 1.^o), 5 000 (M, 2.^o), 4 200 (N, 3.^o), 3 333,3 (M, 4.^o).
Mandatos: Lista M = 3, Lista N = 1, Lista O = 0.

- (b) **Saint-Laguë:** Quocientes: 10 000 (M, 1.^o), 4 200 (N, 2.^o), 3 333,3 (M, 3.^o), 1 800 (O, 4.^o/4.^o empate com N : 3 = 1400).
Mandatos: Lista M = 2, Lista N = 1, Lista O = 1.
11. (a) Proporção direta (total = 100 func.): Departamento A = 60 pc; Departamento B = 36 pc; Departamento C = 24 pc.
(b) d'Hondt para 6 unidades (divisores 50, 30, 20): $A = 3$, $B = 2$, $C = 1$.
12. Quocientes ordenados: 2400 (A, 1.^o), 1600 (B, 2.^o), 1200 (A, 3.^o), 800 (A, 4.^o), 800 (B, 5.^o), 600 (A, 6.^o), 533,3 (B, 7.^o), 480 (A, 8.^o), 400 (A, 9.^o).
Atribuição: Lista A: 6 mandatos; Lista B: 3 mandatos.
13. Ordem de atribuição dos 4 mandatos: 1.^o Mandato: Lista Alfa (4800); 2.^o Mandato: Lista Beta (3200); 3.^o Mandato: Lista Alfa (2400); 4.^o Mandato: Empate a 1600 entre Alfa, Beta e Gama. Pela regra habitual de favorecimento da menor votação/critério de desempate, o mandato vai para Gama (ou distribuído conforme regulamento).
Sem mandato garantido antes do desempate: Nenhuma fica totalmente sem mandato se Gama receber o 4.^o.
14. Numa votação com 30 eleitores e 3 opções, o total de pontos distribuídos é $30 \times (3 + 2 + 1) = 180$ pontos.
Pontos de M = $180 - (75 + 60) = 180 - 135 = 45$ pontos.
15. (a) **Maioria simples:** P_1 vence com 12 votos (contra 10 de P_2 e 8 de P_3).
(b) **Método de Borda (3, 2, 1 pts):**
- P_1 : $12 \times 3 + 10 \times 1 + 8 \times 1 = 36 + 10 + 8 = 54$ pts.
 - P_2 : $12 \times 2 + 10 \times 3 + 8 \times 2 = 24 + 30 + 16 = 70$ pts.
 - P_3 : $12 \times 1 + 10 \times 2 + 8 \times 3 = 12 + 20 + 24 = 56$ pts.
- Vencedor:** Personalidade P_2 com 70 pontos.
16. Divisores 1, 3: Quocientes: A (8000, 1.^o), B (3000, 2.^o), A /3 (2666,7, 3.^o).
Atribuição: Lista A: 2 mandatos; Lista B: 1 mandato; Lista C: 0 mandatos.
17. Total associados = 300. Proporções:
- Núcleo N_1 : $\frac{150}{300} \times 30 = 15$ bilhetes.
 - Núcleo N_2 : $\frac{90}{300} \times 30 = 9$ bilhetes.
 - Núcleo N_3 : $\frac{60}{300} \times 30 = 6$ bilhetes.
18. (a) $\text{Votantes} = 10\,000 \times 0,75 = 7\,500$. Votos válidos = $7\,500 \times 0,95 = 7\,125$ votos.
(b) $\text{Maioria absoluta} = \left\lfloor \frac{7125}{2} \right\rfloor + 1 = 3\,563$ votos.
19. Quocientes Método d'Hondt: 1.^o 15 000 (C_1), 2.^o 9 000 (C_2), 3.^o 7 500 (C_1).
Atribuição: Candidatura C_1 : 2 mandatos; Candidatura C_2 : 1 mandato; Candidatura C_3 : 0 mandatos.
20. Maiores quocientes entre os calculados: 1.^o 15 000 (M), 2.^o 9 000 (N), 3.^o 5 000 (M), 4.^o 3 000 (M), 5.^o 3 000 (N), 6.^o 2 142,9 (M).
Atribuição final: Lista M: 4 mandatos; Lista N: 2 mandatos.