Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 835) – 1ª FASE – 26 DE JUNHO 2024

1.

Soma dos pontos atribuídos a cada castelo:

A -> 3 + 5 + 3 = 11 pontos

L -> 5 + 1 + 3 + 1 = 10 pontos

M -> 2 + 4 + 2 = 8 pontos

V -> 3 + 2 + 2 + 4 = 11 pontos

Nenhum castelo obtém a maioria absoluta do total de pontos, por isso elimina-se o castelo M

Nova tabela

	A	L	V
Carlos	0	5 + 2	3
Diana	3 + 4	1	2
Fausto	5	3	2
Matilde	3	1	4 + 2
Total	15	12	13

Nenhum castelo obtém a maioria absoluta dos votos. Elimina-se o castelo L.

Reformulando de novo a tabela:

	A	V
Carlos	0	3 + 7
Diana	7 + 1	2
Fausto	5 + 3	2
Matilde	3	6 + 1
Total	19	21

Vence o castelo V

Assim teremos:

I -> b) ; II -> a) ; III -> c) ; IV -> b)

2.

Divisor padrão: $\frac{350+150+300}{200} = 4$

	A	B	C	Total
Quota Padrão	$\frac{350}{4} = 87{,}5$	$\frac{150}{4} = 37{,}5$	$\frac{300}{4} = 75$	
Nº porta-chaves	87	37	75	199
Restantes porta-chaves		+1		

Estabelecimento A -> 87 porta-chaves

Estabelecimento B -> 38 porta-chaves

Estabelecimento C -> 75 porta-chaves

3.

Vamos apresentar duas formas de resolver o problema.

<u>1ª Forma de resolução:</u>

Calcular o número de litros de gasolina necessários:

4,8 l ----------100 km

X ------------3125 km

Calcular o valor total que a família Silva gastou em gasolina:

$$150l \times 1{,}77€ = 265{,}50€$$

Calcular a percentagem destinada a impostos:

2,3% do PV correspondente ao IVA sobre a margem de comercialização

16,4% do PV correspondente ao IVA sobre o preço de referência

36,7% do PV correspondente ao ISP

TOTAL: 55,4%

Calcular o valor destinado a impostos:

$$265{,}50 \times 0{,}554 = 147{,}09€$$

<u>2ª Forma de resolução:</u>

Calcular o número de litros de gasolina necessários:

4,8 l ----------100 km

X ------------3125 km

Calcular o valor total que a família Silva gastou em gasolina:

$$150l \times 1{,}77€ = 265{,}50€$$

Calcular o valor destinado ao IVA sobre a margem de comercialização:

$$265{,}50 \times 0{,}023 = 6{,}1065€$$

Calcular o valor destinado ao IVA sobre o preço de referência:

$$265{,}50 \times 0{,}164 = 43{,}542€$$

Calcular o valor destinado ao ISP:

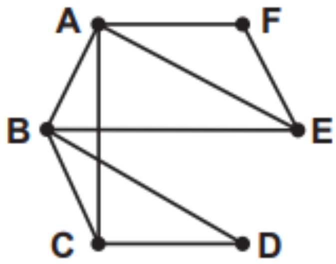
$$265{,}50 \times 0{,}367 = 97{,}4385€$$

Calcular o valor destinado a impostos:

$$6{,}1065 + 43{,}542 + 97{,}4385 = 147{,}087 \approx 147{,}09€$$

4.

O grafo construído, no qual cada vértice representa uma das letras usadas nas peças criadas pelo Manuel e cada aresta simboliza uma peça, deve assemelhar-se ao seguinte:



Todos os vértices apresentam grau par, exceto os vértices C e E. Ao incluir a aresta EC, alcançamos um grafo conexo onde todos os vértices possuem grau par, formando assim um Grafo de Euler. Um Grafo de Euler permite um Circuito de Euler, que é um percurso que começa e termina no mesmo vértice, passando por todas as arestas uma única vez.

Assim, a aresta que representa a peça em falta será EC ou CE.

5.

5.1.

Sabemos que:

- A(t) representa o número de árvores em milhares;
- A(7) representa o número de árvores no início de 2009;
- A(5) representa o número de árvores no início de 2007;
- A(7)-A(5) representa o aumento do número de árvores entre o início de 2007 e o início de 2009

Assim, A(7)-A(5)>10 significa que o aumento do número de árvores entre 1 de janeiro de 2009 e 1 de janeiro de 2007 foi maior que 10 milhares, ou seja, superior a 10 000.

Resposta: **Opção (B)**

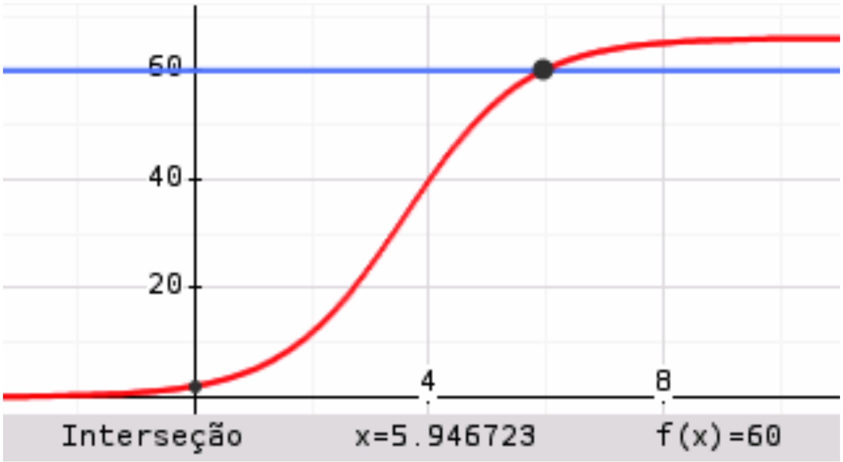
5.2. Calculando o número de árvore no início de 2002, temos:

$A(0) = \frac{66}{1+32e^{-0,87\times 0}} = \frac{66}{1+32\times 1} = \frac{66}{33} = 2$ milhares

No ano em causa, o número de árvores foi 30 vezes superior, ou seja:

$30 \times A(0) = 30 \times 2 = 60$ milhares

Assim, usando a calculadora gráfica para obter o gráfico da função A(t) e também o gráfico da função constante $f(x) = 60$, numa janela adequada, obtemos a abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor do tempo em que o número de árvores era de 60 000:



Assim, temos que o número de árvores atingiu o valor 60 000 para $t \approx 5{,}95$, ou seja, 6 anos após o início de 2002, isto é, em 2008.

5.3. Sabemos que:

- no início de 2011, o número de árvores era de $A(9) = \frac{66}{1+32e^{-0{,}87\times 9}} \approx 65{,}660$ milhares
- no início de 2012, o número de árvores era de $A(10) = \frac{66}{1+32e^{-0{,}87\times 10}} \approx 65{,}871$ milhares
- o aumento do número de árvores foi de $65\,871 - 65\,660 = 211$ árvores
- como o aumento do número de árvores por fatores naturais corresponde a $0{,}21\%$ do número de árvores que existiam no início de 2011, esta parte do aumento corresponde a $0{,}0021 \times 65\,660 \approx 138$ árvores

Assim, o número de árvores plantadas corresponde à diferença entre o aumento total do número de árvores registado durante 2011 e o número de árvores que surgiram por fatores naturais, ou seja:

$$211 - 138 = 73 \text{ árvores}$$

Resposta: **Opção (A)**

6.

A tabela de frequências que resulta, diretamente, da leitura dos dois gráficos é (**a negrito**):

Classes	n_i	N_i	f_i	F_i
]0,10] x_1	**29**	29	5%	***z*=5%**
]10,20] x_2	**116**	145	20%	**25%**
]20,30] x_3	87	232	15%	**40%**
]30,40] x_4	232	464	40%	***x*=80%**
]40,50] x_5	y=58	522	10%	**90%**
]60,70] x_6	***y*=58**	580	10%	**100%**

n_i: frequência absoluta simples; **N_i:** frequência absoluta acumulada;

fi: frequência relativa simples; **F_i:** frequência relativa acumulada.

$f_6=F_6-F_5=$ 100%-90%=10%

$f_5=f_6$ porque as classes]40,50] e]50,60] têm a mesma frequência. Logo, f_5 =10%.

***x*=100%-(10%+10%)=80%**

$N_2=n_1+n_2=29+116=145$

Determinamos z:

145 ----------25%

29 ------------ z

Vamos agora determinar o número total de clientes (N):

29 --------- 5%

N ------------ 100%

$f_4=F_4-F_3=$80%-40%=40% $n_4=580\times0{,}40=232$

$f_3=F_3-F_2=$40%-25%=15% $n_3=580\times0{,}15=87$

Calculo de y:

$$2y = N - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$
$$\Leftrightarrow 2y = 580 - (29 + 116 + 87 + 232) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{116}{2} = 58$$

Resposta:

I a) **II** a) **III** b) **IV** c)

NOTA: A tabela foi preenchida com os valores entretanto calculados.

7.

7.1.

Tabela de frequências

Idade em classes	Frequência absoluta	Frequência relativa em %
[18, 28[	25 + 40 + 10 = 75	75/400 =0,1875= 18,75%
[28, 38[	100 + 30 + 20 = 150	150/400=0,375 = 37,5%
[38, 48[	50 + 30 + 30 = 110	110/400=0,275 = 27,5%
[48, 58[	25 + 20 + 20 = 65	65/400 =0,1625= 16,25%
Total	200+120+80=400	100%

7.2.

I – a)

Total de condutores de

(a) ligeiros – **200** condutores

(b) motociclistas – 120 condutores

(c) autocaravanas – 80 condutores

II – b)

Tempo de condução ininterrupta em horas

classes	(a) ligeiros	(b) motociclistas	(c) autocaravanas
]0, 1]	30% de 200 = 60	**30% de 120 = 36**	10% de 80 = 8
]1, 2]	40% de 200 = 80	60% de 120 = 72	30% de 80 = 24
]2, 3]	30% de 200 = 60	**10% de 120 = 12**	60% de 80 = 48
total	200	120	80

III – c)

60%

IV – b)

V – b)

Classe modal

(a) ligeiros - [28, 38[- 100 condutores

(b) motociclistas - [18, 28[- 40 condutores

(c) autocaravanas - [38, 48[- 30 condutores

VI – c)

Quartil 1

(a) ligeiros

classes	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
]0, 1]	60	60
]1, 2]	80	140
]2, 3]	60	200
total	200	

200/4=50, logo Q1 está em]0, 1]

(b) motociclistas

classes	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
]0, 1]	36	36
]1, 2]	72	108
]2, 3]	12	120
total	120	

120/4=30, logo Q1 está em]0, 1]

(c) autocaravanas

classes	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
]0, 1]	8	8
]1, 2]	24	32
]2, 3]	48	80
total	80	

80/4=20, logo Q1 está em]1, 2]

VII – c)

Quartil 2

(a) ligeiros

Idade em classes	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
[18, 28[	25	25
[28, 38[	100	125
[38, 48[	50	175
[48, 58[	25	200
Total	200	

200/2=100 , logo Q2 está em [28, 38[

(b) motociclistas

Idade em classes	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
[18, 28[	40	40
[28, 38[	30	70
[38, 48[	30	100
[48, 58[	20	120
Total	120	

120/2=60, logo Q2 está em [28, 38[

(c) autocaravanas

Idade em classes	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
[18, 28[	10	10
[28, 38[	20	30
[38, 48[	30	60
[48, 58[	20	80
Total	80	

80/2=40, logo Q2 está em [38, 48[

Resposta

(a) 1 (b) 2, 4, 5 (c) 3, 6, 7

8.

8.1. O Manuel pretende determinar a probabilidade de obter uma matrícula com apenas uma vogal, que não se pode repetir.

Os casos favoráveis obtêm-se ao se considerar 1 das 3 vogais disponíveis no conjunto (A, E, I). Nos restantes espaços destinados a letras irão existir 7 possibilidades de consoantes de escolha (B,C,D,F,G,H,J), sendo que se poderá repetir consoantes. A única vogal escolhida pode ser colocada em um dos 4 espaços disponíveis para as letras. Logo:

$$n.º\ de\ casos\ favoráveis = 3 \times 7^3 \times 4$$

Quanto aos casos possíveis, em cada um dos espaços destinados a letras nas matrículas existem 10 letras disponíveis para esses espaços, pelo que:

$$n.º\ de\ casos\ possíveis = 10^4$$

Assim, vem que:

Escolhe-se ao acaso uma das matrículas que é possível formar nas condições dadas.

Para determinar a probabilidade de obter uma matrícula com apenas uma vogal, que não se pode repetir, o Manuel desenvolveu o raciocínio seguinte.

Uma vez que a parte numérica da matrícula (78) já se encontra definida, o Manuel dedicou a sua atenção à sequência de letras que constitui a matrícula.

O Manuel começou por pensar que a única vogal só poderia ser escolhida de entre as ___3 disponíveis. De seguida, percebeu que existem ___7^3___ formas de escolher as restantes três letras. Concluiu, portanto, que o número de casos favoráveis para determinar a probabilidade solicitada seria o quádruplo do produto dos dois valores anteriores.

Quanto ao número de casos possíveis, o Manuel obteve ___10^4___ casos.

As correspondências corretas são:

I → b) ; II → b) ; III → c) IV → b)

8.2. As matrículas a considerar são:

A ____ 7 8 ____ A

Como as restantes duas letras que determinam estas matrículas têm de ser diferentes entre e diferentes de A, então no primeiro espaço temos 9 possibilidades e no segundo espaço temos 8 possibilidades. Logo:

$$n.º\ de\ matrículas = 9 \times 8 = 72$$

Resposta: **Opção (B)**

9.

Vamos apresentar três formas de resolver o problema.

1ª Forma de resolução:

Consideremos os acontecimentos

C: «O aluno tem carta de condução.»

G: «O aluno gostaria de percorrer a EN2.»

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos que gostaria de percorrer a EN2, queremos saber qual a probabilidade desse aluno não ter carta de condução, isto é, queremos determinar $P(\bar{C}|G)$.

Tendo em conta o enunciado, podemos calcular:

$P(C) = 0{,}2$ e $P(G|C) = 0{,}75$, logo $P(C \cap G) = P(C) \times P(G|C) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$

$P(G) = 0{,}5$, logo $P(\bar{C} \cap G) = P(G) - P(C \cap G) = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$

Então $P(\bar{C}|G) = \frac{P(\bar{C} \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$

2ª Forma de resolução:

Preenchimento de uma tabela de dupla entrada

$P(C) = 0{,}2$ e $P(G|C) = 0{,}75$, logo $P(C \cap G) = P(C) \times P(G|C) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$

$P(G) = 0{,}5$, logo $P(\bar{C} \cap G) = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$

	G	$\bar{G}$	Total
C	0,15		0,2
$\bar{C}$	0,35		
Total	0,5		

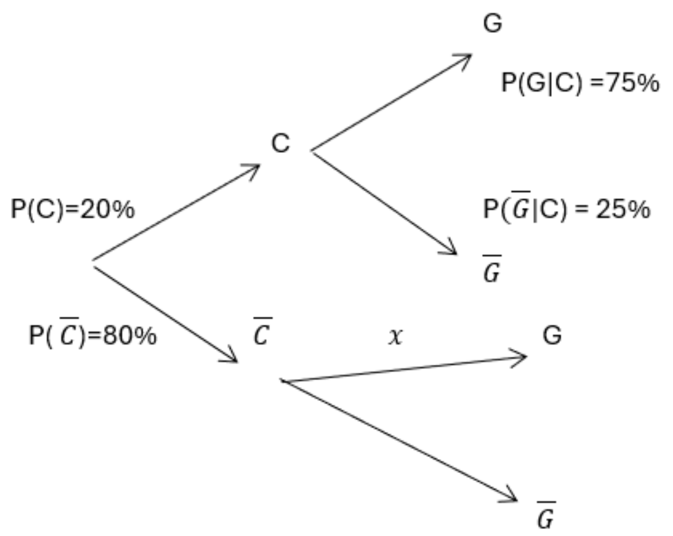
Nota: os restantes valores da tabela não são necessários para o cálculo da probabilidade pedida

Então $P(\bar{C}|G) = \frac{P(\bar{C} \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$

3ª Forma de resolução:

C: "Alunos que têm carta de condução"

G: " Alunos que gostariam de percorrer a EN2"



$$P(G \cap C) + P(G \cap \bar{C}) = P(G) \Leftrightarrow 20\% \times 75\% + 80\% \times x = 50\% \Leftrightarrow x = \frac{50\% - 15\%}{80\%} \Leftrightarrow x = 43{,}75\%$$

$$P(\bar{C}|G) = \frac{P(\bar{C} \cap G)}{P(G)} = \frac{80\% \times 43{,}75\%}{50\%} = 70\%$$

10.

A amostra tem dimensão $\boldsymbol{n} = 225$ motociclistas

A média amostral é $\bar{x} = 4{,}5$ etapas

Desvio padrão amostral é $s = 1{,}2$ etapas

O nível de confiança de 99% é associado ao valor $z \approx 2{,}576$

Considerando o intervalo de confiança para a média

$$\left]\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

e substituindo todos os valores vem

$$\left]4{,}5 - 2{,}576 \times \frac{1{,}2}{\sqrt{225}}\ ;\ 4{,}5 + 2{,}576 \times \frac{1{,}2}{\sqrt{225}}\right[\quad = \quad]4{,}29\ ;\ 4{,}71[$$

O Fred tinha razão em duvidar da afirmação proferida no clube de motociclismo, uma vez que o número médio de etapas referido, 6 etapas, não pertence ao intervalo $]4{,}29\ ;\ 4{,}71[$.

FIM