Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 30 DE JUNHO 2022

1.

Seja x o número de rolos do tecido TA e y o número de rolos do tecido TB.

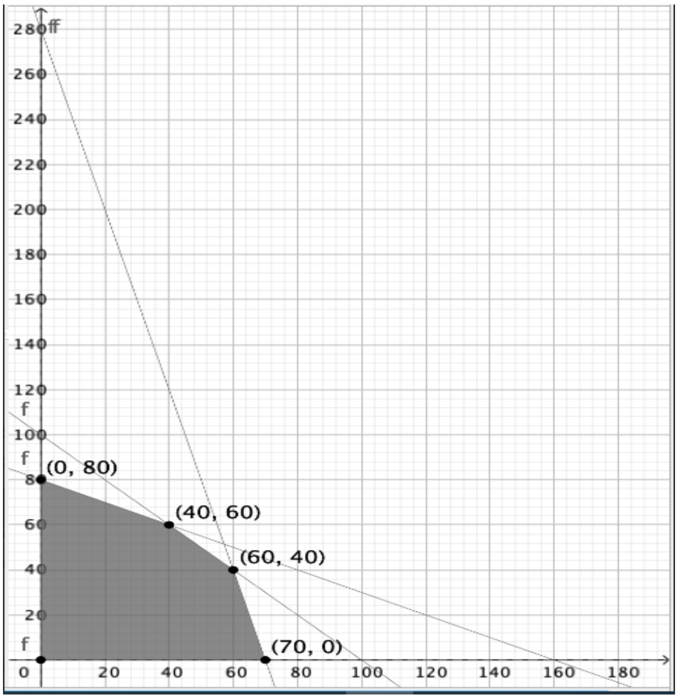
A função objetivo, que se pretende maximizar, é $L(x, y) = 120x + 80y$.

Quanto às restrições, a condição relativa ao tempo de lavagem no tanque é $x + 2y \leq 160$; relativamente ao tempo na banca de coloração é $x + y \leq 100$ e relativamente ao tempo na máquina de acabamento é $4x + y \leq 280$.

Tendo em conta as restrições óbvias $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \\ 4x + y \leq 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 80 \\ y \leq -x + 100 \\ y \leq -4x + 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é:



Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível, $A(0,80), B(40,60), C(60,40)$, e $D(70,0)$, averiguamos a solução ótima:

$L(0,80) = 120 \times 0 + 80 \times 80 = 6400$ euros

$L(40,60) = 120 \times 40 + 80 \times 60 = 4800 + 4800 = 9600$ euros

$L(60,40) = 120 \times 60 + 80 \times 40 = 7200 + 3200 = 10400$ euros

$L(70,0) = 120 \times 70 + 80 \times 0 = 8400$ euros

Desta forma, concluímos que o lucro máximo é 10400 euros, obtido no ponto C.

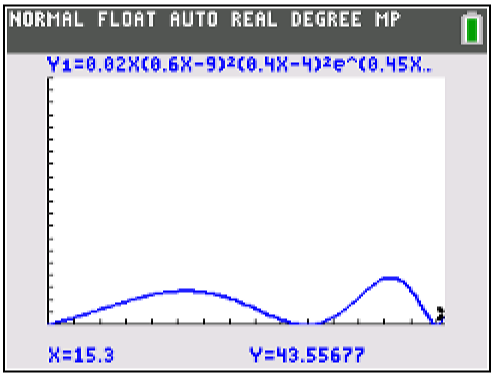
Resposta: Para a empresa obter o lucro total máximo deve produzir 60 rolos do tecido TA e 40 rolos do tecido TB.

2.

2.1.

Atendendo a que a função d nos dá a distância, em linha reta, da Leonor ao ponto de partida, a distância pedida é dada por $d(15,3)$

Calculando, com recurso à calculadora gráfica e fazendo a edição da função tendo em conta o seu domínio obtemos:

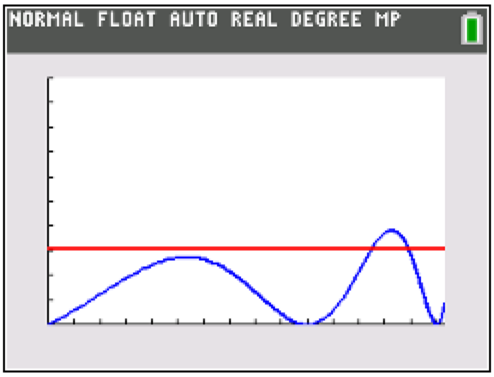


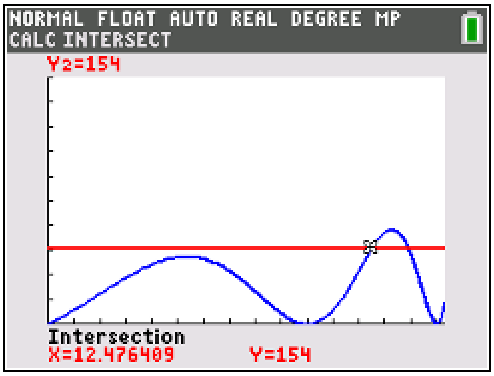
Assim temos $d(15,3) \approx 43,557$

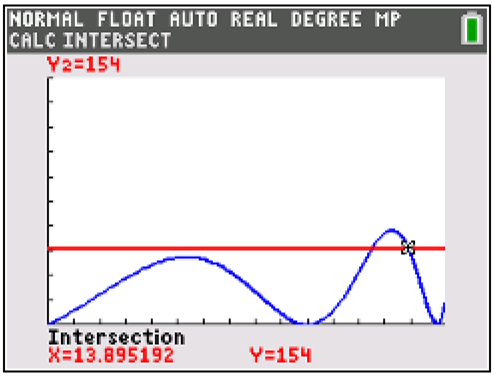
Resposta: A distância pedida é de $43,6$ metros.

2.2.

Fazendo, na calculadora, a edição da função d tendo em conta o seu **domínio** e também da reta de equação $y = 154$ obtemos as interseções que nos permitem resolver a inequação $d(t) > 154$:







Sendo assim, façamos agora: $13,895 - 12,476 = 1,419$ minutos

Convertendo para minutos e segundos obtemos:

$1,419 = 1 + 0,419$

$0.419 \times 60 = 25,14$

Resposta: A distância foi superior a 154 metros durante, aproximadamente, 1 minuto e 25 segundos.

2.3.

Como se trata de uma taxa de variação instantânea, $V(11) \approx 58,4$ significa que, aos 11 minutos de corrida, a distância, em linha reta, da Leonor ao ponto de partida estava a aumentar à razão aproximada de 58,4 metros por minuto.

3.

3.1.

O número de cartas inclinadas vai diminuindo de 2 em cada fila e o número de cartas horizontais vai diminuindo de 1 unidade.

Então, o número de cartas em cada fila pode ser dado pela expressão

$c_n = (22-2n)+(10-n) = 32-3n$ com $n \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

Verifiquemos agora se a diferença entre cada termo e o anterior é constante:

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= 32-3(n+1)-(32-3n) \\ &= 32-3n-3-32+3n = -3 \end{aligned}$$

Então, a sequência é uma progressão aritmética, porque do cálculo anterior resultou uma constante, e a sua razão é -3 tal como se pretendia justificar.

3.2.

Agora a progressão é do mesmo tipo que a anterior só que a começar de "cima" para "baixo", pelo que o primeiro termo é 2 e a razão é 3.

Estamos, assim, perante uma progressão aritmética em que o 100º termo (correspondente ao nº de cartas da 100ª fila) é dado por $2+99\times 3 = 299$

O número total de cartas é dado por: $\frac{2+299}{2}\times 100 = 301\times 50 = 15050$.

Resposta: Seria necessário utilizar 15050 cartas.

4.

4.1.

A área do terreno é dada por $A(x) = 6x - x^2 = x(6-x)$ com $0 < x < 6$

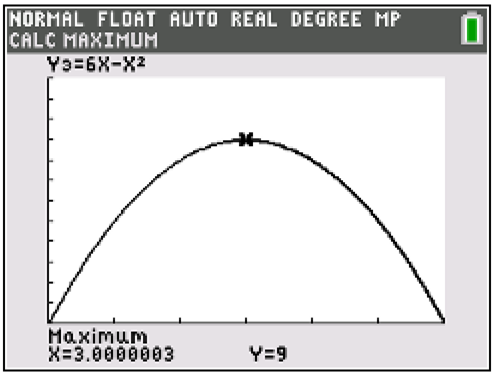
Ora, a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas dos seus lados, pelo que, se um lado tem medida x, o outro tem, assim, medida $(6-x)$ e o perímetro é dado por:

$P = 2x + 2(6-x) = 2x + 12 - 2x = 12\,\text{m}$

Resposta: O perímetro é de 12 metros.

4.2.

A função área é representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para baixo. A área máxima corresponde à ordenada do vértice. Podemos obter esse valor recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:



Resposta: A área máxima é 9 m^2.

5.

Podemos optar por dois processos de resolução.

1ª Resolução:

A partir do histograma, organizamos os dados na seguinte tabela:

Pesos (em Kg)	Marca da classe ($\boldsymbol{x'_i}$)	Frequência absoluta (f_i)	$x'_i \times f_i$
[0; 0,5[	0,25	3	0,75
[0,5; 1[	0,75	14	10,5
[1; 1,5[	1,25	8	10
[1,5; 2[	1,75	17	29,75
[2; 2,5[	2,25	5	11,25
[2,5; 3[	2,75	5	13,75
[3; 3,5[	3,25	6	19,5
		n = 58	$\sum_{i=1}^{7} (\boldsymbol{x'_i \times f_i}) = \mathbf{95,5}$

Concluímos que a média é:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{7} \ (\boldsymbol{x'_i} \times \boldsymbol{f_i})}{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{95,5}}{\mathbf{58}} \approx \mathbf{1,65}\ \boldsymbol{kg}$$

2ª Resolução:

O item também pode ser resolvido recorrendo às capacidades da calculadora: editamos duas listas, uma com a marca de cada classe, a outra com a respetiva frequência absoluta e calculamos a média:

	A l1	B l2
=		
1	0.25	3
2	0.75	14
3	1.25	8
4	1.75	17
5	2.25	5
6	2.75	5
7	3.25	6

Título	Estatísti...
$\bar{x}$	1.64655
Σx	95.5
Σx^2	199.125
$sx := s_{n-...}$	0.857161
$\sigma x := \sigma_{n...}$	0.849739
n	58.

Resposta: A média é aproximadamente 1,65 Kg.

6.

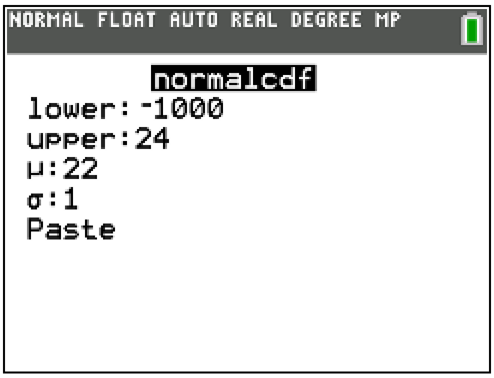
Seja X a variável aleatória «peso de um aluno do 1.º ano tomado ao acaso, em kg" tal que $X \sim N(22,1)$.

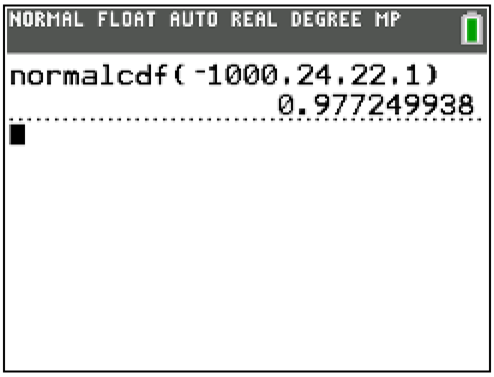
Este pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1ª Resolução:

Como o peso da mochila é de 2,4 kg e não deve exceder 10% do peso do corpo, pretende-se determinar a probabilidade de $P(X \leq 24)$.

Recorrendo à calculadora gráfica:





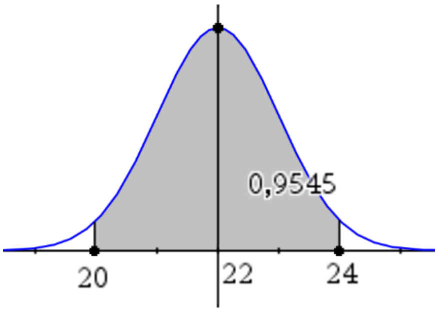
Logo, $P(X \leq 24) \approx 98\%$.

2ª Resolução:

Como o valor médio da distribuição é $\mu = 22$ e o desvio padrão da distribuição é $\sigma = 1$, temos:

$\mu - 2\,\sigma = 18 \quad e \quad \mu + 2\,\sigma = 24$

Sabemos que P $(\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}9545$, logo P $(20 < X < 24) \approx 0{,}9545$.



Assim,

a probabilidade pedida é $P(X \leq 24) = P(X < 22) + \frac{P\,(20<X<24)}{2} \approx 0{,}5 + \frac{0{,}9545}{2} = 0{,}97725 \approx 98\%$

Resposta: A probabilidade é, aproximadamente, 98%.

7.

7.1. Este item pode ser resolvido por diferentes processos. Abaixo apresentam-se duas possíveis resoluções:

1ª resolução:

Consideremos a figura 4, dividida por quadrados:

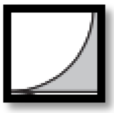


Figura 1

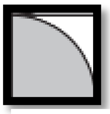
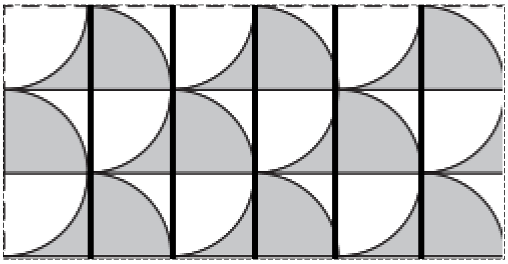


Figura 2



Como o comprimento do raio de cada semicircunferência mede 20 cm, temos que a área de cada um destes quadrados é $A_{quadrado} = l^2 = 20^2 = 400\ cm^2$.

A soma da área a sombreado da figura 1 com a área a sombreado da figura 2 corresponde à área de um destes quadrados.

Observando a figura, na sua totalidade, encontramos nove pares destes quadrados. Logo, a área a sombreado é:

$$A_{sombeado} = 9 \times A_{quadrado} = 9 \times 400 = 3600\ cm^2$$

2ª resolução:

Podemos considerar que a figura 4 está decomposta em dezoito quadrados, com 20 cm de lado.

Cada quadrado é composto por um quarto de círculo e uma região complementar.

Podemos observar que existem tantos quadrados com um quarto de círculo sombreado, como quadrados com um quarto de círculo a branco. Existem, também, tantas regiões complementares sombreadas, como regiões complementares a branco.

Deste modo, a área sombreada é metade da área do retângulo que delimita a Figura 5:

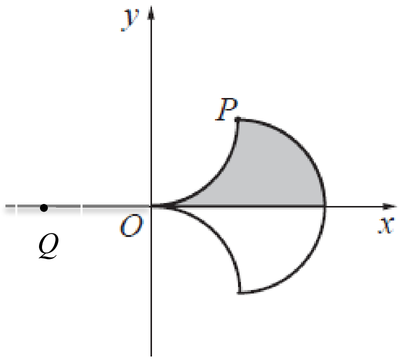
$$\frac{60 \times 120}{2} = 3600$$

Assim, a região sombreada tem 3600 cm^2 de área.

Resposta: A área da região sombreada é 3600 cm^2.

7.2.

Como o raio da semicircunferência é igual a 20 cm, as coordenadas do ponto P são (20,20). Deste modo, o ângulo formado pela reta *OP* e a parte positiva do eixo das abcissas é igual a 45º.



Rodando o ponto *P*, $-585°$ em torno do ponto *O*, no sentido horário, obtemos o seu transformado, digamos *Q*, de coordenadas $\left(-\sqrt{800}, 0\right)$.

Vejamos:

$-585° = -360° - 225°$ (uma volta no sentido horário, mais 225º no sentido horário).

Ao rodar o ponto *P* 360º no sentido horário, este volta à posição inicial, tendo ainda que girar 225º no mesmo sentido.

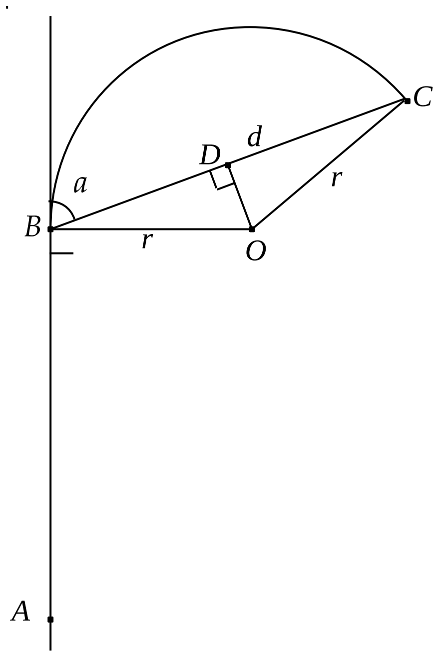
Ora, $-225° = -180° - 45°$, o que leva o ponto *P* a rodar até ao semieixo negativo de *OX*, fazendo com que *Q* diste de *O* o mesmo comprimento do segmento [*OP*], isto é:

$$\overline{OP}^2 = 20^2 + 20^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 400 + 400 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 800 \Leftrightarrow \overline{OP} = \sqrt{800}$$

Resposta: As coordenadas de Q são $\left(-\sqrt{800}, 0\right)$.

8.

8.1.



Seja D o ponto médio de $[BC]$. O segmento $[OD]$ divide o triângulo $[BCO]$ em dois triângulos retângulos geometricamente iguais.

Consideremos o triângulo retângulo $[BDO]$.

Como a circunferência de centro O é tangente à reta AB no ponto B, temos $O\hat{B}A = 90^{\circ}$, pelo que $O\hat{B}D = 90^{\circ} - \alpha$ e $D\hat{O}B = \alpha$.

Assim, $\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}}$.

Como $\overline{BD} = \frac{d}{2}$ e $\overline{BO} = r$, temos:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{r} \Leftrightarrow r = \frac{\frac{d}{2}}{\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{d}{2\sin\alpha} \quad \text{c. q. d.}$$

8.2.

A distância total é dada pela soma do comprimento $\overline{AB}$ com o comprimento do arco de circunferência BC.

Comecemos por determinar o valor do ângulo α na situação em que $r = 10$ e $d = 18$:

$$10 = \frac{18}{2\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{18}{2\times 10} \Leftrightarrow \sin\alpha = 0{,}9$$

Então $\alpha = \sin^{-1}(0{,}9) \approx 64{,}158$, pelo que o ângulo $\measuredangle CBO = 90 - 64{,}158 = 25{,}842^{\circ}$

Assim, temos que $\measuredangle BOC = 180 - 2\times 25{,}842 = 128{,}316^{\circ}$, uma vez que o triângulo $[BOC]$ é isósceles.

Deste modo, o comprimento do arco de circunferência BC é dado por:

$$\frac{128{,}316\times\pi\times 10}{180} \approx 22{,}40$$

Donde, $12 + 22{,}40 = 34{,}4$

Resposta: A distância total percorrida foi de 34,4 metros.

FIM