APM Associação de Professores de Matemática

Proposta de resolução da Prova de Matemática A (código 635)

21 de Junho de 2010

Grupo I

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, $P(A \cap B) = 0$ e
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   Ou seja, de acordo com os dados do enunciado,
   $70\% = 30\% + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 40\%$

   A opção correcta é:

Versão 1:	B
Versão 2:	C

2. Como se trata de uma única acção de formação, podem seleccionar-se aleatoriamente ${}^{10}C_3$ grupos de três trabalhadores, que são os casos possíveis. Como os três amigos constituem um único grupo a probabilidade solicitada é $\frac{1}{{}^{10}C_3}$.

   A opção correcta é:

Versão 1:	C
Versão 2:	B

3. Como se trata de uma distribuição de probabilidade, a soma das probabilidades tem que ser 1.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3a = \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10}$$
$$\Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

   Logo $P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$
   Pelo que $P(X = 0) = P(X = 2)$

   A opção correcta é:

Versão 1:	B
Versão 2:	C

4. Como f é uma função afim, $f''(x) = 0$.

   Sabe-se que $h''(x) = f''(x) + (e^x)''$

   $= 0 + e^x$

   $= e^x$

   Das quatro representações gráficas apresentadas a única que pode representar a função $h''(x) = e^x$ é:

Versão 1:	A
Versão 2:	D

5. Da observação da parte do gráfico da função f apresentada, e pelo facto da recta de equação $x = 1$ ser assímptota do seu gráfico, podemos concluir que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

   Logo $\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to 1^-}(3x)}{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = \frac{3}{+\infty} = 0$.

   A opção correcta é:

Versão 1:	C
Versão 2:	B

6. Se considerarmos $[OB]$ como a base do triângulo, temos que $\overline{OB}$=1, sendo a altura a medida correspondente à ordenada de A, isto é, 5. Pelo que a área do triângulo é $\frac{1\times 5}{2} = \frac{5}{2}$

   A opção correcta é:

Versão 1:	A
Versão 2:	D

7. Um número complexo *w* é um imaginário puro se $arg(w) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

   Logo z é um imaginário puro se $\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in Z$

   Para $k = 1,\ \theta = \frac{5\pi}{8}$

   A opção correcta é:

Versão 1:	D
Versão 2:	A

8. Como todos os números complexos que têm a sua imagem geométrica na região representada na figura têm módulo superior a 3 e nenhum deles é imaginário puro temos que:

A opção correcta é:

Versão 1:	B
Versão 2:	C

Grupo II

1.

1.1.

$$w=\frac{3-i\times\left(z_1\right)^7}{\overline{z_2}}=\frac{3-i\times\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{7}\right)^7}{2-i}=\frac{3-i\times\left(\operatorname{cis}\pi\right)}{2-i}=\frac{3-i\times(-1)}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=$$

$$=\frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2}=\frac{6+5i-1}{5}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

Na forma trigonométrica: $\rho=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=1\\ \theta\in 1^{\text{o}}\,\text{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

Então: $w=1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

1.2.

$$\left|z_1+z_2\right|^2=\left|\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+i\right|^2=\left|\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+i\right|^2=$$

$$=\left|\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)+\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)i\right|=\left(\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)^2+\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)^2}\right)^2=$$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+4+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1=$$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+5=$$

$$=6+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

c.q.d.

2.

2.1. Sejam os acontecimentos:

A: Ter computador portátil

B: Não saber o nome do director

Sabemos que:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{5} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{2} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{1}{3}$$

Pretendemos determinar $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{B}\right)$

Ora: $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap B)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})\times\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

Pelo que:

$$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$
$$=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{6+15-5}{30}=1-\frac{16}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

2.2.

N.º de alunos com computador portátil (C.P.): $\dfrac{1}{5}\times150=30$ e portanto 120 não têm C.P.

Logo a comissão será constituída por 4 dos 30 alunos com C.P. e 2 dos 120 sem C.P., pelo que o número de comissões diferentes é dado por:

$$^{30}\mathrm{C}_4\times{}^{120}\mathrm{C}_2=27405\times7140=195671700$$

3.

Nesta experiência aleatória todos os acontecimentos elementares são equiprováveis pelo que se poderá utilizar a regra de Laplace, consistindo esta no quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Nesta experiência, retirar simultaneamente duas bolas do saco é o mesmo que retirar, sucessivamente, duas bolas do saco, sem reposição.

Tratando-se de um saco que contém 18 bolas indistinguíveis ao tacto, qualquer uma das 18 bolas poderá sair com qualquer uma das 17 restantes. Assim, o número de casos possíveis será igual a 18×17.

Para que possamos obter um par de bolas da mesma cor, teremos que retirar 2 bolas azuis ou 2 bolas vermelhas. Para saírem 2 bolas azuis teremos que tirar qualquer uma das 12 bolas azuis com qualquer uma das 11 restantes da mesma cor. Para saírem 2 bolas vermelhas teremos que tirar qualquer uma das 6 bolas vermelhas com qualquer uma das 5 restantes da mesma cor. Assim, o número de casos favoráveis à saída de duas bolas da mesma cor será igual a $12\times11+6\times5$.

Conclui-se, então, que a probabilidade das duas bolas extraídas serem da mesma cor é igual a $\frac{12\times11+6\times5}{18\times17}$.

4.

4.1.

$$N(t)=8\log_4(3t+1)^3-8\log_4(3t+1)=8\times3\log_4(3t+1)-8\log_4(3t+1)=$$
$$=24\log_4(3t+1)-8\log_4(3t+1)=16\log_4(3t+1)$$

Para qualquer $t \in [0,5]$ c.q.d.

4.2.

2400 = 24 centenas

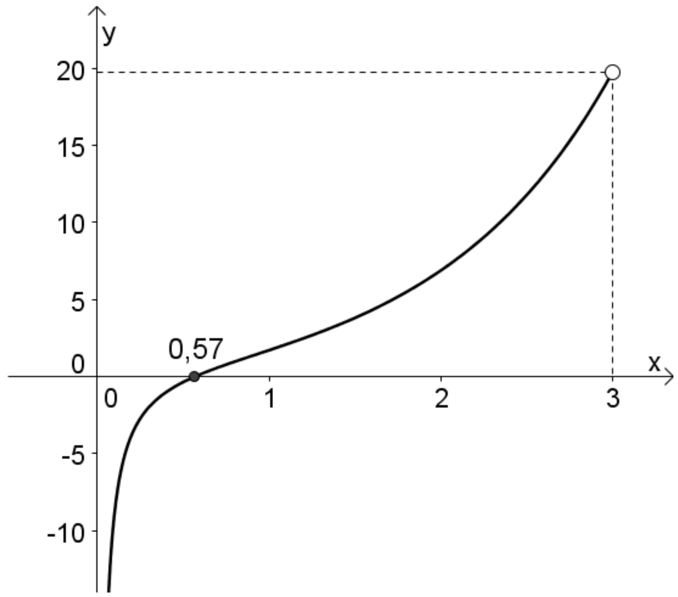
$$N(t)=24\Leftrightarrow16\log_4(3t+1)=24\Leftrightarrow\log_4(3t+1)=\frac{24}{16}\Leftrightarrow\log_4(3t+1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow3t+1=4^{3/2}\Leftrightarrow3t+1=\sqrt{64}\Leftrightarrow3t=8-1\Leftrightarrow t=\frac{7}{3}\Leftrightarrow t=2+\frac{1}{3}$$

$t=2h\ 20m$

Pelo que, para vender 2400 bilhetes foi necessário, 2h e 20 minutos.

5.

Usando as capacidades gráficas da calculadora obtemos o gráfico de $f'(x)$



Da análise do gráfico podemos tirar as seguintes conclusões:

	0		0,57		3
$f'(x)$	n.d.	–	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	↘	Min.	↗	n.d.

A função f é decrescente em $]0\ ;\ 0{,}57[$ e é crescente em $]0{,}57\ ;\ 3[$.

f admite um mínimo absoluto para $x \approx 0{,}57$

6.

6.1.

A existir uma assímptota oblíqua, esta terá que ser quando $x \to -\infty$, uma vez que o domínio da função é $]-\infty, 2\pi]$. Para que a recta de equação $y = ax + b$ seja assímptota do gráfico de f, tem que se verificar que $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[ax + b + e^x - ax - b\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, fica demonstrado o que se pretende.

6.2.

Para que a função f seja contínua para $x=0$, tem que se verificar:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(ax+b+e^x\right) = a\times 0+b+e^0 = b+1$ (1)
- $f(0) = a\times 0 + b + e^0 = b+1$ (2)
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-sen(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x} = 1-2\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(2x)}{2x} =$ (3)
  $=1-2\times 1 = 1-2 = -1$

De (1), (2) e (3) tem-se que: $b+1=-1 \Leftrightarrow b=-2$

7.

7.1.

O triângulo [OAB] é rectângulo em B porque $\sphericalangle \mathrm{OBA}$ é inscrito numa semi-circunferência.

O perímetro do triângulo é dado por: $\mathrm{P} = \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{AB}}$.

Ora:

- $\overline{\mathrm{OA}} = 2$
- $\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{2} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{OB}} = 2\cos\alpha$
- $\mathrm{sen}\alpha = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{AB}} = 2\mathrm{sen}\alpha$

Assim: $f(\alpha) = 2+2\cos\alpha+2\mathrm{sen}\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 2(1+\cos\alpha+\mathrm{sen}\alpha)$

c.q.d.

7.2.

Para determinar o maximizante da função, calcula-se o zero da função derivada.

$f'(\alpha) = 2(-\mathrm{sen}\alpha+\cos\alpha)$, para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pelo que: $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2(-\text{sen}\alpha+\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow -\text{sen}\alpha+\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=\text{sen}\alpha$

Atendendo a que $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos que, necessariamente, $\alpha=\frac{\pi}{4}$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	n.d.	+	0	–	n.d.
$f(\alpha)$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Logo, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo [OAB] é máximo é $\frac{\pi}{4}$.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt