Proposta de resolução da Prova de Matemática A (código 635)

2ª fase

19 de Julho de 2010

Grupo I

1.

Como só existem bolas de dois tipos na caixa e a probabilidade de sair bola azul é $\frac{1}{2}$, existem tantas bolas roxas quantas as azuis, que são 8.

Resposta correcta:

Versão 1: C
Versão 2: B

2.

Escolhendo três das cinco posições do número para os algarismos 5, temos ${}^5C_3$ hipóteses e podem ainda ser colocados os 4 restantes algarismos nas 2 restantes posições, podendo fazê-lo com repetição (4^2 hipóteses), pelo que existem ${}^5C_3 \times 4^2$ números nas condições do enunciado.

Resposta correcta:

Versão 1: B
Versão 2: C

3.

Na linha do triângulo de Pascal em causa apenas os números reproduzidos no enunciado são inferiores ou iguais a 105, pelo que nenhum dos restantes poderia ser parcela de uma soma com resultado 105. Dos números apresentados também não é possível somar dois deles com o resultado 105, pelo que nenhum par de números desta linha do Triângulo de Pascal tem soma 105, logo o valor da probabilidade solicitada é 0 (zero).

Resposta correcta:

Versão 1: D
Versão 2: A

4.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-2x\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x)-\lim_{x\to+\infty}(2x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$$

Como a função *h* é par, $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} h(x)$,

Ou seja $\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

Resposta correcta:

Versão 1: A
Versão 2: D

5.

Como $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$,

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(u_n)\right]=\ln 0^+ = -\infty$$

Resposta correcta:

Versão 1: D
Versão 2: A

6.

Pela observação do gráfico da função *f'*, derivada da função *f*, conclui-se que no intervalo $]0,a[$ a função derivada é positiva, logo a função é crescente nesse intervalo.

Resposta correcta:

Versão 1: C
Versão 2: B

7.

Como o vértice A é a representação geométrica de um número complexo de módulo 1, o mesmo acontecerá com o número complexo representado geometricamente pelo vértice D.

Como os argumentos dos números complexos representados por dois vértices consecutivos do pentágono diferem de $\frac{2\pi}{5}$, o argumento do número complexo representado pelo vértice D será $3\times\frac{2\pi}{5}=\frac{6\pi}{5}$.

Resposta correcta:

Versão 1: B
Versão 2: C

8.

Como $w=\rho cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $w^6=\rho^6 cis\left(6\times\frac{3\pi}{2}\right)=\rho^6 cis\left(\frac{18\pi}{2}\right)=\rho^6 cis\left(9\pi\right)=\rho^6 cis\ \pi$.

Logo a representação geométrica de w^6 pertence ao eixo real.

Resposta correcta:

Versão 1: A
Versão 2: D

Grupo II

1.

1.1.

$$z_1^{\ 4}=\left(\sqrt{2}\right)^4 cis\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)=4cis(\pi)=-4$$

$$w=\frac{-4+4i}{i}=\frac{\left(-4+4i\right)\times i}{i\times i}=\frac{-4i+4i^2}{i^2}=\frac{-4-4i}{-1}=4+4i$$

Na forma trigonométrica: $\rho=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=1\\ \theta\in 1^{\text{o}}\,\text{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

Então: $w=4+4i=4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

1.2.

$$z_1 = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}i = 1+i$$

Sejam A e B as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 .

Temos então que as suas coordenadas são : $A(1,1)$ e $B(3,0)$

O raio da circunferência é $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

A condição pedida é, pois, $|z-3| = \sqrt{5}$

2.

2.1. A variável aleatória X , tal como está definida, toma os valores -3, -2, -1, 0 e 1

$$\mathrm{P}(X=-3) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=-2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=-1) = \frac{4}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(X=0) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=1) = \frac{4}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

A tabela de distribuição de X é, assim:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

2.2. $P(L \mid J)$ representa a probabilidade de o ponto Q pertencer ao 3º quadrante sabendo que o número saído no dado A é negativo.

Ora, para que o ponto Q pertença ao 3º quadrante é necessário que tenha abcissa e ordenada negativas. Já sabemos que a sua abcissa é negativa, visto que o número saído no dado A é negativo. Então basta agora que a sua ordenada seja também negativa. Assim sendo, para que isso aconteça, existe apenas um caso favorável entre seis possíveis (a saída da face -1 no dado B). Como todos os acontecimentos são equiprováveis, pela regra de Laplace, vem que $P(L \mid J) = \frac{1}{6}$

3.

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A} \mid B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - [P(B) - P(A \cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

c.q.d.

4.

4.1. Atendendo ao domínio da função, a existir assimptota oblíqua, ela será quando $x \to +\infty$.

Determinemos, se existir, o seu declive:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

E a sua ordenada na origem, se existir:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Como b não é um número real, então o gráfico da função não admite assimptotas oblíquas.

4.2. Estudemos, no intervalo $]2\,,+\infty[$, a função derivada de f.

$$f'(x)=\frac{1}{5}-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{5}-\frac{1}{x}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{1}{5}\ \Leftrightarrow\ x=5$$

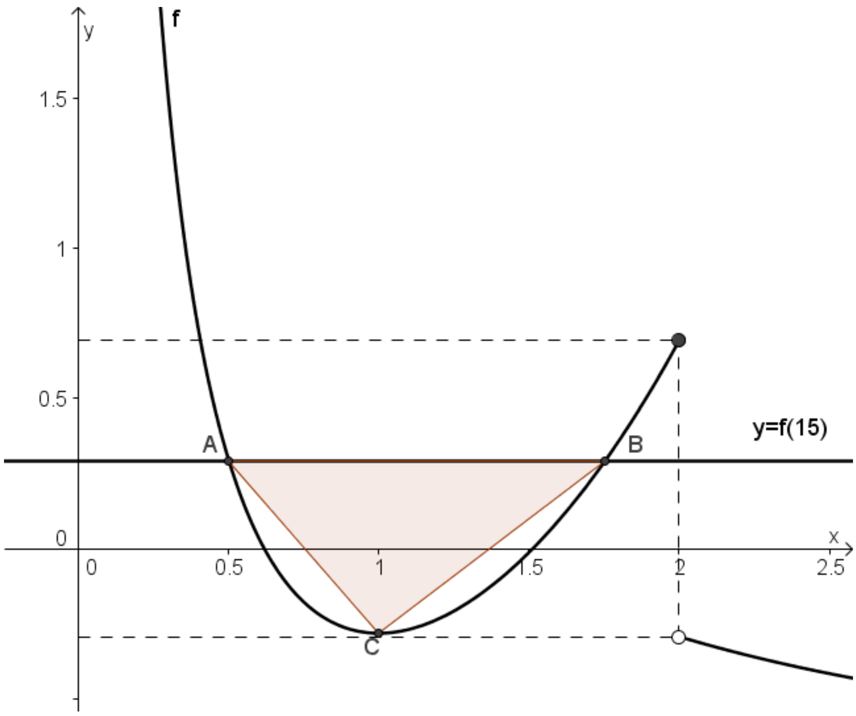
	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	+
$f(x)$	n.d.	↘	min	↗

Estudado o comportamento da função podemos concluir que admite um mínimo para $x=5$, que é $f(5)=1-\ln 5$, pelo que f admite no intervalo $]2\,,+\infty[$ um extremo relativo, c.q.d.

4.3.

$f(15)=3-\ln 15$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, representemos graficamente a função f e a recta de equação $y=3-\ln 15$.



Determinando a intersecção da recta com o gráfico da função obtemos para as coordenadas de A e de B , as seguintes: $A(0{,}50\,;0{,}29)$ e $B(1{,}75\,;0{,}29)$.

Determinando o mínimo da função no intervalo em causa, obtemos para coordenadas do ponto $C(1{,}00\,;\,-0{,}28)$

Temos então que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{(1{,}75-0{,}50)\times(3-\ln(15)+\ 0{,}28)}{2}\approx 0{,}4$$

5.

5.1. f é contínua em IR , por se tratar de soma e composição de funções contínuas, logo é também contínua no intervalo $[-2\,,-1]$.

$f(-2)=2+e^{2\times(-8)-1}\approx 2{,}000$

$f(-1)=1+e^{2\times(-1)-1}\approx 1{,}050$

Ora $f(-1)<1{,}5<f(-2)$, logo, pelo Teorema de Bolzano, há-de existir pelo menos um valor $x_1\in\,]-2\,,-1[$ tal que $f(x_1)=1{,}5$ ou seja, a equação $f(x)=1{,}5$ tem pelo menos uma solução nesse intervalo, c.q.d.

5.2. $f'(x)=-1+6x^2\ e^{2x^3-1}$

$f'(0)=-1+0\times\ e^{-1}=-1$

$f(0)=0+e^{2\times 0\,-1}=e^{-1}$

A recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero tem declive $f'(0)=-1$ e contém o ponto de coordenadas $\left(0\,,\frac{1}{e}\right)$ logo a sua equação reduzida é $y=-x+\frac{1}{e}$

6.

6.1. A altura do combustível no reservatório é dada por $\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC}$ para $\theta \epsilon \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e por $\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OC}$ para $\theta \epsilon \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Para $\theta \epsilon \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ temos que

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3\cos\theta = \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

Para $\theta \epsilon \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ temos que

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3\cos(\pi - \theta) = \overline{OC}$$
$$\Leftrightarrow -3\cos\theta = \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = 3 + \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

Logo, em qualquer dos casos, a altura do combustível no reservatório é dada pela expressão $3 - 3\cos\theta$, ou seja, $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta$, c.q.d.

6.2.

$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos\theta = 3 \Leftrightarrow -3\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$

Como $\theta \in]0, \pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Quando a altura do combustível no depósito é 3, o ângulo AOB é $\frac{\pi}{2}$ rad. Portanto $C \equiv O$, e o depósito está a metade da sua capacidade.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt